

## VECKOPM 5

Det huvudsakliga temat för vecka 5 är dubbel- och trippelintegralen.

Datorövningarna för vecka 5 och 6 handlar finita elementmetoden i 1-D, se [FEM1](#) och [Stången](#).

Dugga 2 kommer att vara öppen från onsdag vecka 5 till söndag vecka 6.

**Rekommenderade uppgifter.**

Avsnitt	Demo	Räkna själv
14.1		2, 8, 14
14.2	15	2, 4, 8, 16, 20
14.3	5, 7	2, 4, 10, 13, 23
14.4	3, 9	2, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 30
14.5	5, 7	2, 4, 6, 8, 10, 12

**Datorövningar, vecka 5 och 6.**

**Mål.** Att lära hur man löser randvärdesproblem i en variabel med finita elementmetoden i MATLAB. Detta är även en förberedelse för MATLABS PDE Toolbox för finita element i två variabler.

**Litteratur.** [FEM1](#) och [Stången](#).

**Matlab-program.** [MyPoissonSolver.m](#). [BdryData1.m](#). [EqData1.m](#).

Kopiera filerna genom att klicka på länkarna här eller gå till länken "Matlab" på kurshemsidan och ladda ned dem därifrån. Skriv `help MyPoissonSolver` på kommandoraden och läs dokumentationen.

**Inledning.** Programmet `MyPoissonSolver` löser randvärdesproblem av typen

$$\begin{aligned} -D(a(x)Du(x)) + d(x)Du(x) + c(x)u(x) &= f(x), & \text{för } x \in I = (K, L), \\ a(x)D_n u(x) + k(x)(u(x) - u_A(x)) &= g(x), & \text{för } x = K, x = L. \end{aligned}$$

Här är  $D = \frac{d}{dx}$  och  $D_n$  riktningsderivatan i utåtriktningen, dvs  $D_n = -\frac{d}{dx}$  i  $x = K$  och  $D_n = \frac{d}{dx}$  i  $x = L$ . Programmet bygger på finita elementmetoden med styckvis linjära funktioner.

Funktionen `MyPoissonSolver` med deklARATIONEN

```
function [U, A, b] = MyPoissonSolver(p, t, e, EqData, BdryData)
```

ställer upp och löser ekvationssystemet  $AU = b$ , där  $A$  är styvhetsmatrisen,  $b$  är lastvektorn och vektorn  $U$  innehåller nodvärdena  $U_i = U(x_i)$  till finita elementlösningen  $U(x) = \sum_{i=1}^n U_i \phi_i(x)$ .

Information om beräkningsnätet lagras i matriserna `p`, `t`, `e` med samma struktur som i MATLABS PDE Toolbox som vi ska använda senare (även i mekanikkursen). Problemets data,  $a, d, c, f, u_A, g$ , definieras i funktionsfilerna `EqData.m` och `BdryData.m`.

*Matrisen p.* Koordinaterna för noderna

$$K = x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = L$$

lagras i vektorn `p` av typ  $1 \times n$ .

*Matrisen t* av typ  $3 \times (n - 1)$  innehåller information om de  $n - 1$  intervallen

$$I_i = (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Närmare bestämt innehåller kolonn nr  $i$  de index (pekare) som pekar på ändpunkterna i intervall nr  $i$ , dvs

$$\begin{bmatrix} i \\ i + 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den tredje siffran är ett märke ("subdomain reference tag"), som jag satt till 1 här, och som kan användas till att markera vilket delområde som intervallet  $I_i$  tillhör, om man fått för sig att dela in intervallet  $I = (K, L)$  i delområden. Detta kan vara praktiskt om koefficienterna ges av olika formler i olika delar av  $I$ .

Matrisen  $e$  innehåller information om randpunkterna,

$$e = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Här är första raden pekare (index) som pekar på de två randpunkterna, här  $x_1$  och  $x_n$ . Den andra raden är märken ("reference tags") som används för att markera vilken randpunkt det är, här betyder 1 vänster ändpunkt och 2 höger ändpunkt. Eftersom man använder pekare spelar det ingen roll i vilken ordning man skriver dem. Följande matris ger samma resultat:

$$e = \begin{bmatrix} n & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detsamma gäller matrisen  $t$ .

Detta kan verka onödigt krångligt, men det är en bra förberedelse för PDE Toolbox, där denna struktur behövs för att beskriva en indelning av ett två-dimensionellt område i trianglar. I två dimensioner finns ju ingen naturlig numrering av punkter, trianglar och randpunkter och man måste använda pekare på detta vis. I PDE Toolbox syftar  $p, t, e$  på "points", "triangles", "edges".

### Uppgifter.

**Uppgift 1. Styckvis linjär funktion.** Skapa ett nät i intervallet  $I = (0, 1)$  med endast  $n = 9$  punkter (så att man kan tydligt se alla).

```
>> n=9
>> p=linspace(0,1,n)
>> t=[1:n-1; 2:n; ones(1,n-1)]
>> e=[1 n; 1 2]
```

Skapa och plotta en styckvis linjär funktion, till exempel,

```
>> V=sin(7*p)
>> plot(p,V,'.-')
```

Kom ihåg att funktionen kan skrivas som en linjär kombination av basfunktionerna:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n V_i \phi_i(x),$$

där  $V_i = V(x_i)$  är nodvärdena som vi skapade nyss. Skapa och plotta även en av basfunktionerna, till exempel  $\phi_5$ . (Se Figur 3 i FEM1.)

**Uppgift 2. MyPoissonSolver.** Kör programmet med samma nät och med de bifogade funktionsfilerna `EqData1.m` och `BdryData1.m`. Läs dokumentationen (`help MyPoissonSolver`) och filerna för att se vilket randvärdesproblem det är. (Det är ett av Problem 1.1–1.5 i FEM1.)

```
>> [U, A, b] = MyPoissonSolver(p, t, e, @EqData1, @BdryData1);
```

Titta på styvhetsmatrisen  $A$  och se att den är tridiagonal.

Plotta den approximativa lösningen  $U$  och den exakta lösningen  $u$ .

Förfina nätet till  $n = 101$  punkter och beräkna igen.

**Uppgift 3. Värmeledning i inhomogent material.** Lös följande randvärdesproblem

$$\begin{aligned} -D(aDu) &= f \quad \text{i } I = (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

med

$$f(x) = x, \quad a(x) = 1 \text{ för } x < 1/2, \quad a(x) = 10 \text{ för } x > 1/2.$$

Detta är Datorövning 6 från lp2. Vad är den fysikaliska betydelsen?

Du bör skriva nya funktionsfiler `EqData3.m` och `BdryData3.m` för denna uppgift.

**Uppgift 4. Stång av två material.** Lös följande randvärdesproblem

$$\begin{aligned} -D(EADu) &= \rho g A \quad \text{i } I = (0, L), \\ u(0) &= 0, \quad E(L)ADu(L) = P, \end{aligned}$$

med

$$E(x) = \begin{cases} 7, & x < L/2, \\ 22, & x > L/2, \end{cases} \quad \rho(x) = \begin{cases} 3, & x < L/2, \\ 8, & x > L/2, \end{cases}$$

och  $L = 1$ ,  $A = 1$ ,  $g = 9.81$ . Här har vi använt dimensionlösa storheter, dvs alla variabler är multipler av lämpligt valda referensvärden. Till exempel,  $E$  ges som multipel av  $E_0 = 10^{10} \text{ N/m}^2$  och  $\rho$  som multipel av  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$  (aluminium och järn).

Experimentera med olika värden på  $P$ . Vad är den mekaniska betydelsen av randvärdesproblemet?

Skriv nya funktionsfiler `EqData4.m` och `BdryData4.m` för denna uppgift.

Frivillig uppgift: Visa att med referensvärden

$$E_0 = 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad L_0 = 1 \text{ m}, \quad g_0 = 1 \text{ m/s}^2, \quad A_0 = 10^{-4} \text{ m}^2,$$

blir enheterna för  $u$  och  $P$

$$u_0 = \frac{\rho_0 g_0 L_0^2}{E_0} = 10^{-7} \text{ m}, \quad P_0 = \rho_0 g_0 A_0 L_0 = 10^{-1} \text{ N}.$$

**Uppgift 5. Elasticitet i rotationssymmetri.** Lös följande randvärdesproblem (i polära koordinater)

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} u &= \frac{1 - \nu^2}{E} K_r \quad \text{för } r \in I = (a, b), \\ u(a) &= 0, \quad u'(b) = 0. \end{aligned}$$

med  $K_r = \rho \omega^2 r$ . Se [Rotel](#). Innan man kan använda finita elementmetoden måste ekvationen skrivas om till formen  $-D(aDu) + cu = f$ . Gör följande omskrivning:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} u = \frac{1 - \nu^2}{E} \rho \omega^2 r.$$

och sedan

$$-\frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{r} u = \frac{1 - \nu^2}{E} \rho \omega^2 r^2.$$

Välj lämpliga värden på  $a, b, \rho, \omega, E, \nu$ . Obs att den inre radien  $a$  bör vara  $> 0$ . Vad är den mekaniska betydelsen av detta problem?

Skriv nya funktionsfiler `EqData5.m` och `BdryData5.m` för denna uppgift.