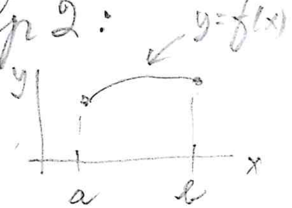
Idag: Dubbelintegralen 4.1 - 4.2

Vi ska definiera

$$\iint_R f\,dA = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

dubbelintegralen av f över rektangel $R=[a,b]\times[c,d]$.

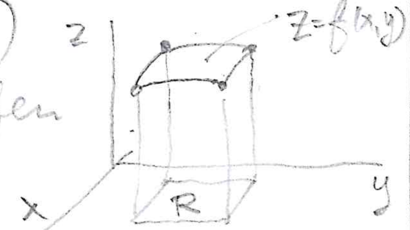
Samma konstruktion som enkelintegralen i lp 2:



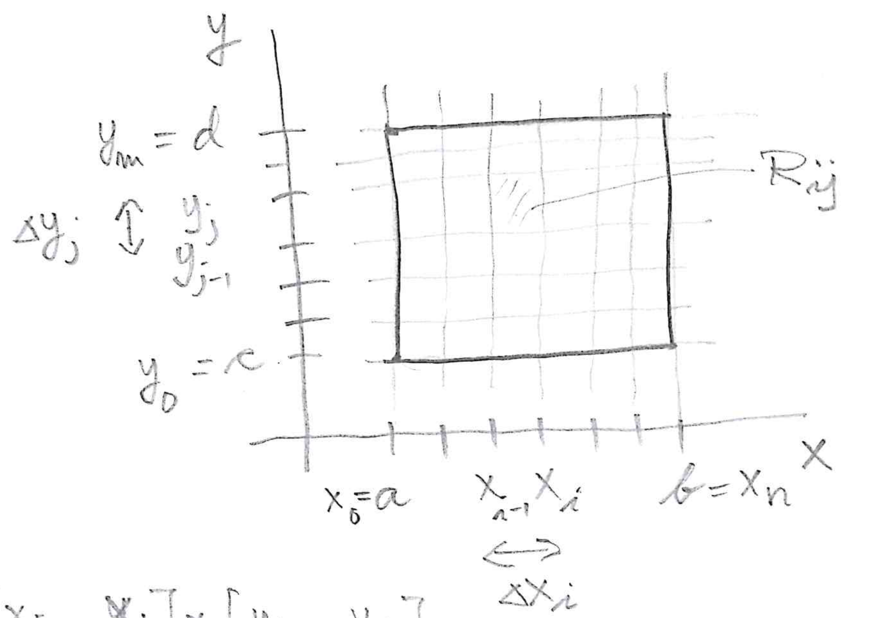
$$\int_I f\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(arean under grafen)

Nu: volymen under grafen



Partition $P=\{(x_i, y_j),\ i=0,\dots,n,\ j=0,\dots,m\}$



$R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$

$h=\max(\mathrm{diam}(R_{ij}))$

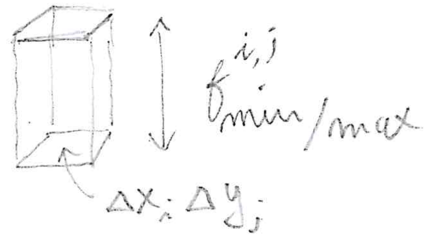
Undre och övre Riemann-summor

$$I_{min}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{min}^{i,j}\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

$$I_{max}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{max}^{i,j}\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

$$f_{min}^{i,j}=\inf_{R_{ij}} f\,,\quad f_{max}^{i,j}=\sup_{R_{ij}} f$$

Summa av volymer:



f är <u>integrerbar</u> över R om $\exists$ unikt tal I så att

$$I_{min}(f,P) \le I \le I_{max}(f,P)$$

<u>för alla</u> P

Då

$$I = \iint_R f\,dA = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

areaelement: $dA = dx\,dy$

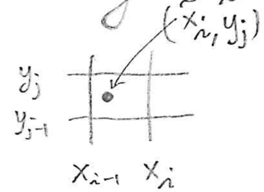
Kontinuerliga funktioner är integrerbara;

<u>Sats 4.1</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kont. och begränsad på R. Då är f integrerbar över R och

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j)\,\Delta x_i \Delta y_j \to \iint_R f\,dA$$

då $h = \max \operatorname{diam}(R_{ij}) \to 0$

för godt. val av evaluerings-punkter $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \in R_{ij}$.



Sats 4.2 (Fubini) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kont. på R

Då gäller

$$\iint_R f\,dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Bevis:

$$\sum\sum f(\tilde{x}_i, \hat{y}_j)\Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \sum \left(\sum f(\hat{x}_i, \tilde{y}_j)\Delta x_i \right) \Delta y_j$$

$$\to \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ex $\quad R = [1,2]\times[3,4]$

$$\iint_R xy\,dx\,dy = \int_3^4 \left(\int_1^2 xy\,dx \right) dy =$$

$$= \int_3^4 y\,dy \int_1^2 x\,dx = \dots$$

Allmänt område $D \subseteq \mathbb{R}^2$:

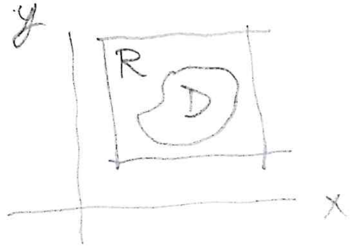
D <u>mätbar</u> om area(D) existerar.

Se läsper. 2 för exempel.

Bilda

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\in R\setminus D \end{cases}$$

med rektangel R så att $D \subseteq R$.



Definiera:

$$\iint_D f\,dA = \iint_R f_D\,dA$$

om den existerar.

Obs: "tunna" mängder har area(D)=0

t.ex. punkt eller kurva.

Sats 4.3 (Egenskaper)

$$\iint_D 1\,dA = \text{area}(D)$$

$$\iint_D f\,dA = \text{volymen under grafen } z=f(x,y) \text{ om } f \geq 0$$

$$\iint_D f\,dA = 0 \quad \text{om area}(D)=0$$

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\,dA = \alpha \iint_D f\,dA + \beta \iint_D g\,dA$$

$$\iint_D f\,dA \leq \iint_D g\,dA \quad \text{om } f \leq g \text{ på } D$$

$$\left| \iint_D f\,dA \right| \leq \iint_D |f|\,dA$$

$$\iint_D f\,dA = \iint_{D_1} f\,dA + \iint_{D_2} f\,dA, \quad D = D_1 \cup D_2 \text{ med } D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

Obs: $R = (a,b)\times(c,d)$ öppen

$\bar{R} = [a,b]\times[c,d]$ sluten

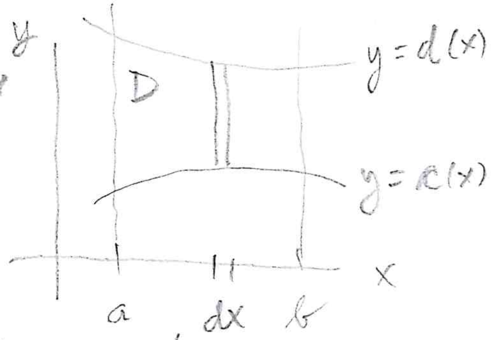
$$\iint_{\bar{R}} f\,dA = \iint_R f\,dA + \underbrace{\iint_{\partial R} f\,dA}_{=0} = \iint_R f\,dA$$

$\bar{R} = R \cup \partial R$, $R \cap \partial R = \emptyset$, $\text{area}(\partial R) = 0$

4.2 Beräkning

D enkelt i y: mellan grafer

$$\text{area}(D) = \int_a^b (d(x) - c(x))\,dx$$



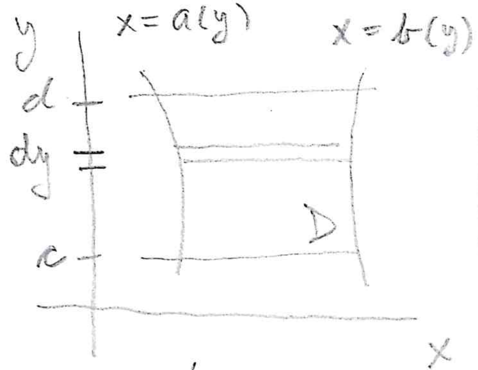
$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b A(x)\,dx$$

Bevis som för Fubinis sats 4.2.

Detta är "skivmetoden" från lp. 2.

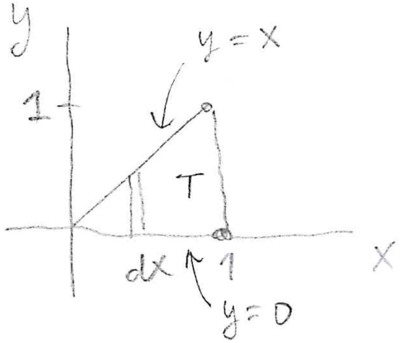
<u>D enkelt i x:</u>

$$\text{area}(D) = \int_c^d (b(y)-a(y))\,dy$$



$$\iint_D f\,dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d A(y)\,dy$$

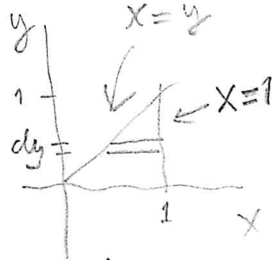
<u>Ex</u>



$$\iint_T xy\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{8}$$



$$\iint_T xy\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{1} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y(1-y)\,dy = \frac{1}{8}$$

<u>Ex</u> Matlab.