Idag: 4.3 Variabelsubstitution
4.4 Generaliserad integral
Medelvärdessatsen (i 4.2)

4.3 Variabelsubstitution

Enkelintegral: $x = g(u)$, $a = g(A)$, $b = g(B)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(g(u))\,g'(u)\,du$$

$$dx = g'(u)\,du$$

Dubbelintegral

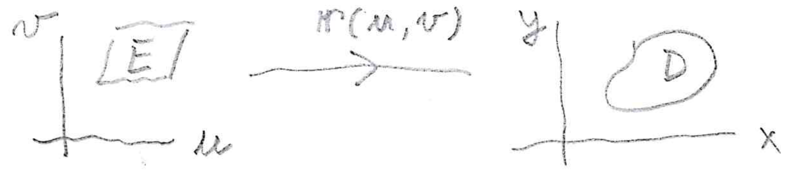
Transformation

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

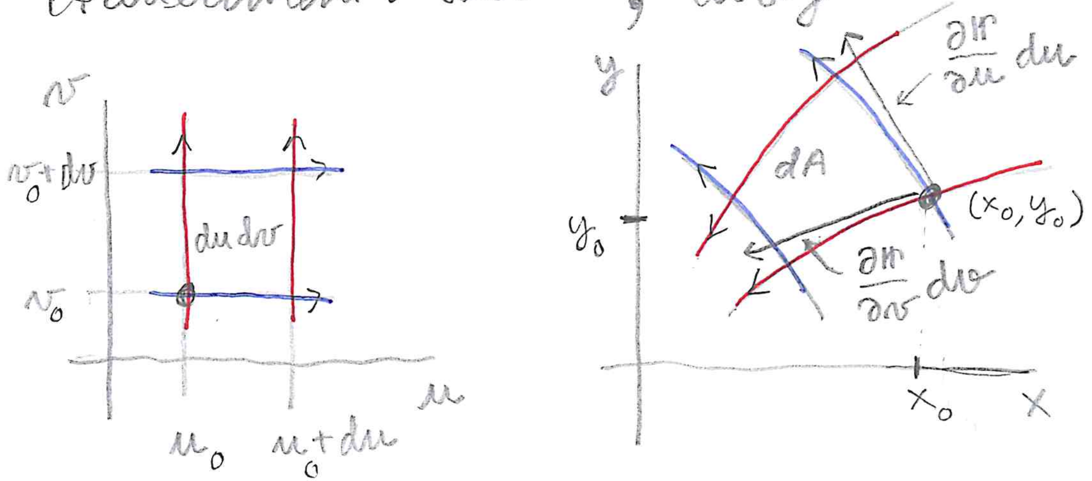
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$$

Invers transf.

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$



Areaelement: $du\,dv$, $dx\,dy$



Koordinatkurvor:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0), \quad u \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v), \quad v \in \mathbb{R}$$

Areaelementet spänns upp av tangenterna:

$$dx\,dy = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)\,du \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\,dv \right\|$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x'_u du & y'_u du & 0 \\ x'_v dv & y'_v dv & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} du\,dv\, e_z$$

Jacobi-determinanten:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_y \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \det(\mathbf{r}'(u,v))$$

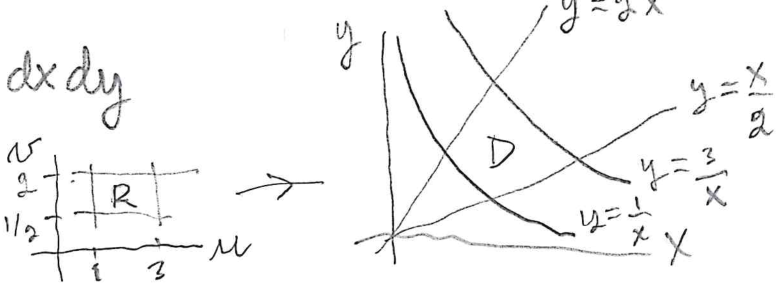
$$dx\,dy = \left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du\,dv\, e_z \right\| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

Ytskalan: $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ (absolutbeloppet av Jacobi-determ.)

Sats 4.5

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

Ex $\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy$



$$1 \le xy \le 3, \quad \frac{1}{2} \le \frac{y}{x} \le 2, \quad R = [1,3] \times [\tfrac{1}{2}, 2]$$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{u/v} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \dots = \frac{1}{2v}$$

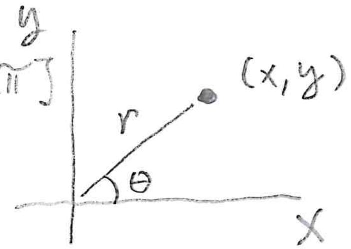
$$\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy = \iint_R \frac{\sqrt{u/v}}{\sqrt{uv}} \frac{1}{2v}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_E \frac{1}{v^2}\,du\,dv = \{\text{rektangel, Fubini}\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 du \int_{1/2}^2 \frac{1}{v^2}\,dv = \dots = \frac{3}{2}$$

Polära koordinater (r, θ)

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}, \quad r \in [0, \infty), \ \theta \in [0, 2\pi]$$

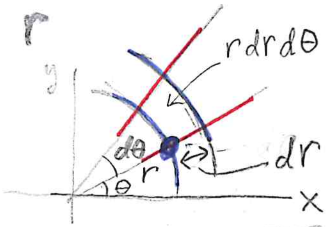


$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{atan}(y/x) \end{cases}, \quad (x,y) \ne (0,0)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\theta & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin\theta & r\cos(\theta) \end{vmatrix} =$$

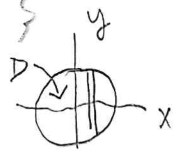
$$= r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r$$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$



<u>Ex</u> Volymen under grafen

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad (x,y) \in D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$$



Enkel i x:

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dy \right) dx$$

Svårt!

Polära: $R = [0,1] \times [0,2\pi]$

$$V = \iint_R (1 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = \{\text{Fubini}\} = \int_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

4.4 <u>Generaliserad</u> <u>integral</u>

$\iint_D f\,dA$ existerar om

- f kontinuerlig och begränsad
- D mätbar och begränsad

Om f eller D obegränsad: <u>generaliserad integral</u>. Då gäller:

Om $f \ge 0$ på D (eller $f \le 0$ på D):

antingen <u>konvergent</u> eller <u>divergent mot $+\infty$</u> (eller $-\infty$)

Då kan man använda upprepad integration (Fubini).

Om f byter tecken: Fubini gäller ej.

<u>Sats 4.6</u> $\iint_D |f|\,dA$ konvergent

$\Rightarrow \iint_D f\,dA$ är konvergent

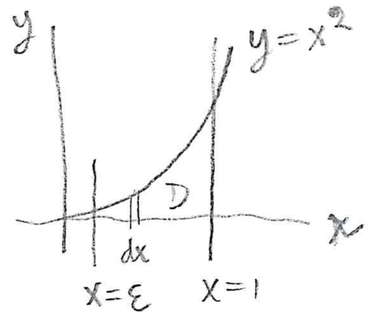
och $\left|\iint_D f\,dA\right| \le \iint_D |f|\,dA$

$\iint_D f\,dA$ kallas då <u>absolutkonvergent</u>.

Alltså: kolla om $\iint_D |f|\,dA$ är konvergent eller ej (med Fubini)

Jämför: absolutkonvergent serie från lp.1.

<u>Ex</u> $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$



D begränsad

f obegränsad

$f \geq 0$ Fubini tillåten

$$\iint_D f\,dA = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^{x^2} (x+y)^{-2}\,dy \right) dx$$

$$= \dots = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[\ln(1+x)\Big]_\varepsilon^1 =$$

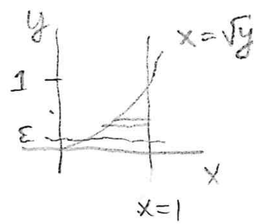
$$= \ln(2) - \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(1+\varepsilon) = \ln(2)$$

Konvergent!

Andra ordningen:

$$\iint_D f\,dA = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 (x+y)^{-2}\,dx \right) dy =$$

$$= \dots = \ln(2).$$



Ex

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\exp(-x^2-y^2)}_{\geq 0}\,dx\,dy = \{\text{Fubini}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

Känner ingen primitiv funktion till e^{-x^2}.

Polära istället: $E = [0,\infty)\times[0,2\pi]$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_E e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\left[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} =$$

$= \pi$. Konvergent!

Vi får även

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi$$

dvs $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (viktig integral)

Medelvärdessatsen sats 4.4 i 4.2

Antag: $D \subseteq \mathbb{R}^2$, sammanhängande, mätbar, begränsad, sluten, och f kontinuerlig i D.

Då finns $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\iint_D f\,dA = f(x_0,y_0)\,\text{area}(A)$$

dvs

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{\text{area}(A)}\iint_D f\,dA = \frac{\iint_D f\,dA}{\iint_D dA}$$

Alltså: f är lika med sitt medelvärde i någon punkt