Idag: 5.5 Grad, div, rot

5.6 Gauss divergenssats

5.5 Grad, div, rot

Nabla-operatorn:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$$

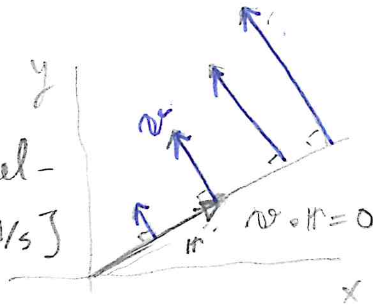
$$\operatorname{div} \mathbb{F} = \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Ex stelkroppsrotation

$$\mathbb{v} = \omega(-y, x, 0)$$

ω vinkelhast. $[1/s]$



$$\nabla \cdot \mathbb{v} = 0 + 0 = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{v} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega(0,0,1) = 2\omega\, e_z$$

Endast rotation

Ex $\mathbb{F}(\mathbb{r}) = \mathbb{r} = (x, y, z)$

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = 1+1+1 = 3, \quad \nabla \times \mathbb{F} = 0$$

Endast div.

Ex $\mathbb{F}(\mathbb{r}) = \dfrac{\mathbb{r}}{\|\mathbb{r}\|^3} = \dfrac{(x,y,z)}{\rho^3}, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \dots = \frac{\rho^2 - 3x^2}{\rho^5}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\rho^2 - 3y^2}{\rho^5}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\rho^2 - 3z^2}{\rho^5}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{3\rho^2 - 3(x^2+y^2+z^2)}{\rho^5} = 0, \quad \rho \neq 0$$

Sats 5.3 Räkneregler

(a) $\nabla(f g) = (\nabla f)\, g + f(\nabla g)$

(b) $\nabla\cdot(f\mathbb{F}) = \nabla f\cdot\mathbb{F} + f\,\nabla\cdot\mathbb{F}$

(c) $\nabla\times(f\mathbb{F}) = (\nabla f)\times\mathbb{F} + f(\nabla\times\mathbb{F})$

(d) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{F}) = 0$ (div rot $\mathbb{F} = 0$)

(e) $\nabla\times(\nabla f) = \mathbb{0}$ (rot grad $f = \mathbb{0}$)

Antag $\mathbb{F}$ konservativt i D, $\mathbb{F} = \nabla\phi$.

(e) $\Rightarrow$ $\nabla\times\mathbb{F} = \nabla\times\nabla\phi = \mathbb{0}$ i D

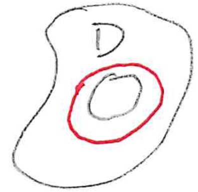
Nödvändigt villkor för kons. fält.

Även tillräckligt om D <u>enkelt sammanhängande</u>:

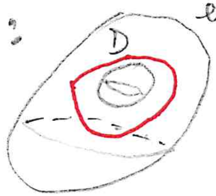
Varje sluten sluten kurva i D omsluter inga punkter som inte tillhör D.

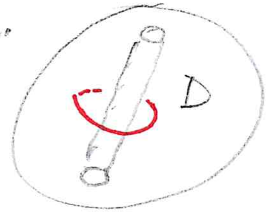
"Inga genomgående hål i D."

I planet:



I rummet: (kurvan kan glida förbi hålet)





Bättre: varje sluten kurva i D kan krympas kontinuerligt till en punkt utan att lämna D.

Sats 5.4 (Tillräckligt villkor för potential)

Antag: $\nabla \times \mathbb{F} = \mathbb{0}$ i enkelt sammanhängande område D

Då är $\mathbb{F}$ konservativ.

Då kan man lösa ekv. systemet $\nabla \phi = \mathbb{F}$

dvs
$$\begin{cases} \phi'_x = F_x \\ \phi'_y = F_y \\ \phi'_z = F_z \end{cases}$$

Ex $\mathbb{F}(\mathbb{r}) = \mathbb{r}$, $\nabla \times \mathbb{F} = \mathbb{0}$

$$\begin{cases} \phi'_x = x \\ \phi'_y = y \\ \phi'_z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + f(y,z) \\ \phi(x,y,z) = \frac{1}{2}y^2 + g(x,z) \\ \phi(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2 + h(x,y) \end{cases}$$

Tag
$$f(y,z) = \tfrac{1}{2}(y^2+z^2) + C$$
$$g(x,z) = \tfrac{1}{2}(x^2+z^2) + C$$
$$h(x,y) = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2) + C$$
$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + C = \tfrac{1}{2}\|\mathbb{r}\|^2 + C$$

5.6 Gauss divergenssats

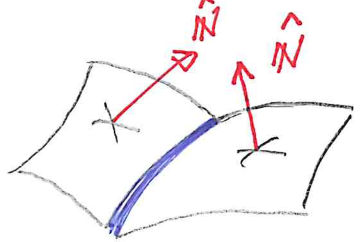
Ytan S är slät om det finns normalvektor i varje punkt, dvs det ska finnas en parametrisering så att

$$\mathbb{r}'_u \times \mathbb{r}'_v \neq \mathbb{0}$$

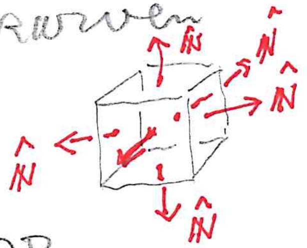
så att $\hat{\mathbb{N}} = \pm \dfrac{\mathbb{r}'_u \times \mathbb{r}'_v}{\|\mathbb{r}'_u \times \mathbb{r}'_v\|}$ existerar

Då kan man välja en orientering.

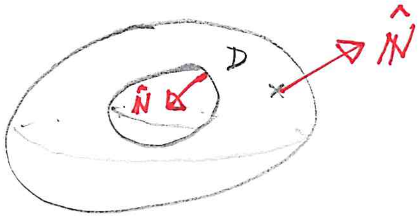
En styckvis slät orienterad yta är hopskarvad av släta orienterade ytor så att orienteringarna stämmer vid skarven.



$\hat{N}$ ej definierad på skarven



Rätblock R, randen $S=\partial R$, är styckvis slät orienterad ytor, här med utåtriktad orientering.



Hålklot med utåtriktad orientering av randen $S=\partial D$

Sats 5.5 Gauss divergenssats

Antag: * $D \subseteq \mathbb{R}^3$, begränsad

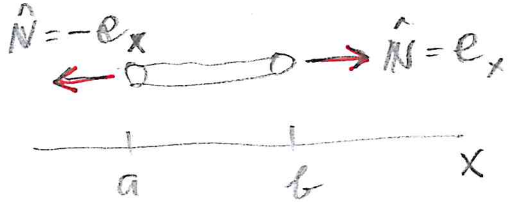
* $S=\partial D$ styckvis slät yta med utåtriktat enhetsnormalvektorfält $\hat{N}$.
* $\mathbb{F}$ kontinuerligt deriverbar i D

Då gäller

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\, dV = \iint_S \hat{N}\cdot\mathbb{F}\, dS$$

3-D version av fundamentalsatsen

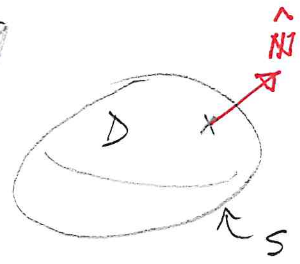
$$\int_a^b Df\, dx = [f]_a^b = f(b)-f(a)$$



$\nabla\cdot\mathbb{F}$ källtäthet i D

$\hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}$ flödestäthet på S

Ex Vätskeströmning



$\mathbb{v}$ [m/s], d [kg/m^3]

$\mathbb{F} = d\,\mathbb{v}$

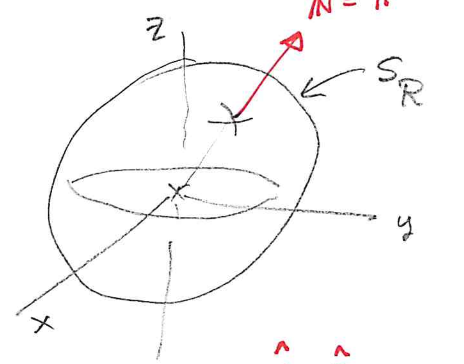
$$\iiint_D \nabla\cdot(d\,\mathbb{v})\,dV = \underbrace{\iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot(d\,\mathbb{v})\,dS}_{\text{netto utflöde}} \left[\frac{kg}{s}\right]$$

Källtäthet: $\nabla\cdot(d\,\mathbb{v})$ $\left[\frac{kg}{m^3 s}\right]$

Flödestäthet: $\hat{\mathbb{N}}\cdot(d\,\mathbb{v})$ $\left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$

Ex Punktkälla

$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = \frac{\mathbb{r}}{\|\mathbb{r}\|^3}$, $\nabla\cdot\mathbb{F} = 0$, $\rho \neq 0$. (exempel 5.19)

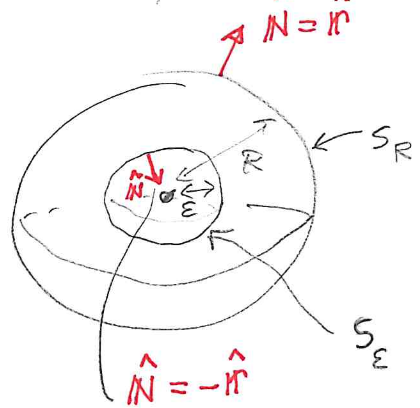


$$\iint_{S_R} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = 4\pi$$

oberoende av R

(exempel 5.16)

Hålklot: $D_{\varepsilon,R}$



Gauss ger

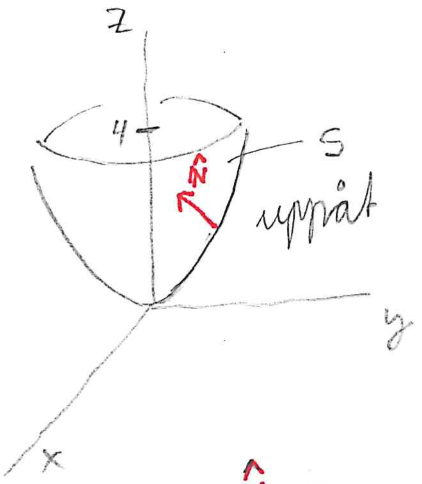
$$\iiint_{D_{\varepsilon,R}} \underbrace{\nabla\cdot\mathbb{F}}_{=0}\,dV = \iint_{S_{\varepsilon,R}} \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,dS =$$

$$= \underbrace{\iint_{S_\varepsilon} \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,dS}_{=-4\pi} + \underbrace{\iint_{S_R} \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,dS}_{=4\pi} = 0$$

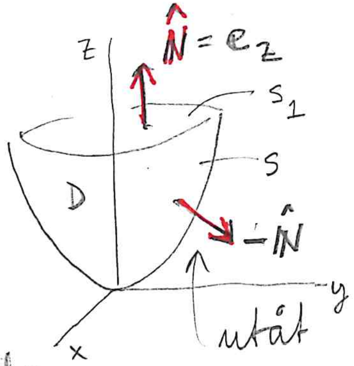
Utflödet $\iint_{S_R} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = 4\pi$ måste komma från en punktkälla i origo med styrkan 4π.

Ex 5.23 $\mathbb{F} = (x, y, z)$

S ytan (utan lock) med uppåtriktad orientering.



Lägg till locket S_1.



Gauss:

$$\underbrace{\iint_{S_1} \underbrace{\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}}_{=4}\, dS}_{\substack{=4\,\text{area}(S_1)\\ =16\pi}} + \underbrace{\iint_S \mathbb{F}\cdot(-\hat{\mathbb{N}})\, dS}_{=-\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\, dS} =$$

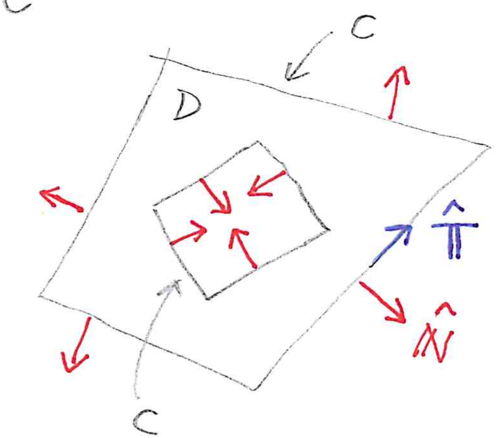
$$= \iiint_D \underbrace{\nabla\cdot\mathbb{F}}_{=3}\, dV = \dots = 24\pi$$

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\, dS = 16\pi - 24\pi = 8\pi$$

Sats 5.6 Gauss sats i planet

* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ begränsad
* $C = \partial D$ styckvis slät kurva med utåtriktad enhetsnormal $\hat{\mathbb{N}}$
* $\mathbb{F}$ kontinuerligt deriverbar i D

$$\Rightarrow \iint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\, dA = \int_C \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\, ds$$



Vektorfält i planet:

$\mathbb{F} = (F_x, F_y)$

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$$