FEM i flera variabler

- FEM bygger på den svaga formuleringen.

Hur tog vi fram svag formulering i 1 dimension? (Kap 3)

1. Multiplicera ekvationen med testfunktion v ($v=0$ där vi har Dirichlet)
2. Integrera över givna området
3. Partiell integration
4. Använd randvillkoren.

Exempel: Poissons ekvation (på stark form).

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in [0,L] \\ u'(L)=0,\ u(0)=0 & \text{(Randvillkor)} \end{cases}$$

Vill ta fram svaga formuleringen.

1. Multiplicera med v (där $v(0)=0$):

$$-u''v = fv$$

2. Integrera över $[0,L]$

$$-\int_0^L u''v\,dx = \int_0^L fv\,dx$$

3. Partiell integration

$$\int_0^L u'v'dx - \left[u'v\right]_{x=0}^{x=L} = \int_0^L fv\,dx$$

FEM i flera variabler

- FEM bygger på den svaga formuleringen.

Hur tog vi fram svag formulering i 1 dimension? (Kap 3)

1. Multiplicera ekvationen med testfunktion v ($v=0$ där vi har Dirichlet)
2. Integrera över givna området
3. Partiell integration
4. Använd randvillkoren.

Exempel: Poissons ekvation (på stark form).

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in [0,L] \\ u'(L) = 0,\ u(0) = 0 & \text{(Randvillkor)} \end{cases}$$

Vill ta fram svaga formuleringen.

1. Multiplicera med v (där $v(0)=0$):

$$-u''v = fv$$

2. Integrera över $[0,L]$

$$-\int_0^L u''v\,dx = \int_0^L fv\,dx$$

3. Partiell integration

$$\int_0^L u'v'dx - \left[u'v\right]_{x=0}^{x=L} = \int_0^L fv\,dx$$

4. Använd randvillkoren

$$\int_0^L u'v'dx - \underbrace{u'(L)}_{=0}v(L) + u'(0)\underbrace{v(0)}_{=0} = \int_0^L f v\,dx$$

Svag formulering: Hitta u med $u(0)=0$ så att

$$\int_0^L u'v'dx = \int_0^L f v\,dx \,, \quad \text{för alla } v \text{ med } v(0)=0.$$

Hur tar vi fram svag formulering i flera dim?

Svar: Samma steg, men vi måste generalisera Partiell integration till flera dim.

P.I. i 1-dim

$$\int_a^b f g\,dx = \underbrace{\Big[F g\Big]_a^b}_{\text{Randterm}} - \int_a^b F g'\,dx$$

Derivatan flyttad till andra funktionen

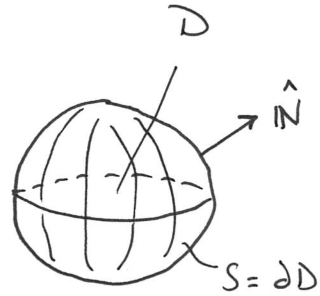
P.I. i 3-dim

$$\iiint_D (\nabla\cdot\mathbb{F})\phi\,dV = \underbrace{\iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,dS}_{\text{Randterm}} - \iiint_D \mathbb{F}\cdot\nabla\phi\,dV$$

Notation: D = 3-dim område

$S = \partial D$ är D:s randyta

$\hat{\mathbb{N}}$ = normalvektor till S



exempel: Ta fram den svaga formen av

$$\begin{cases} -\Delta u = f & x \in D \\ u = s & x \in S_1 \\ D_{\hat{N}} u = g & x \in S_2 \end{cases}$$

$(\Delta = \nabla \cdot \nabla)$ Laplace-operator

$(D_{\hat{N}} u = \hat{\mathbb{N}} \cdot \nabla u)$

$\partial D = S = S_1 \cup S_2$

1. Multiplicera med funktion v ($v = 0$ på S_1).
2. Integrera över D.

$$-\iiint_D \nabla \cdot \nabla u \, v \, dV = \iiint_D f v \, dV$$

3. Partiell integration på VL:

$$-\iiint_D \nabla \cdot \nabla u \, v \, dV = -\iint_S \hat{\mathbb{N}} \cdot \nabla u \, v \, dS + \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v \, dV$$

4. $\longrightarrow$

$$= -\iint_{S_1} \hat{\mathbb{N}} \cdot \nabla u \, \underbrace{v}_{\substack{v=0 \\ \text{på } S_1}} dS - \iint_{S_2} \underbrace{\hat{\mathbb{N}} \cdot \nabla u}_{\substack{D_{\hat{N}} u = g \\ \text{på } S_2}} \, v \, dS + \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v \, dV$$

$$= -\iint_{S_2} g v \, dS + \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v \, dV .$$

Svag form: Hitta u med $u = s$ på S_1 så att

$$\iiint_D \nabla u \cdot \nabla v \, dV = \iiint_D f v \, dV + \iint_{S_2} g v \, dS$$

för alla v med $v = 0$ på S_1.

Exempel: Värmeledningsekvationen (på stark form)

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & x \in D \\ aD_{\hat{N}}u + k(u-u_A) = g & x \in S = \partial D \end{cases}$$

Ta fram svaga formen.

1 och 2: Multiplicera med v (inga ytterliggare krav då vi ej har Dirichlet-villkor) och integrera över D:

$$-\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)\, v\, dV = \iiint_D f\, v\, dV.$$

3. Partiell integration på V.L.:

$$-\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u) v\, dV = \underbrace{-\iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot(a\nabla u)\, v\, dS}_{(x)} + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\, dV$$

4. Använd randvillkor: $aD_{\hat{N}}u = g - k(u-u_A)$

$$(x) = -\iint_S \underbrace{\hat{\mathbb{N}}\cdot(a\nabla u)}_{=aD_{\hat{N}}u}\, v\, dS = -\iint_S (g - k(u-u_A))\, v\, dS$$

Svag formulering:

Hitta u så att

$$\boxed{\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\, dV + \iint_S kuv\, dS = \iiint_D fv\, dV + \iint_S (g+ku_A)\, dS}$$

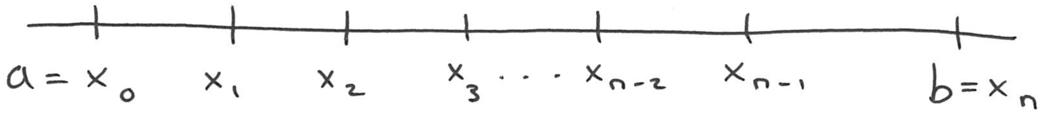
för alla v.

FEM-formulering i 2 variabler

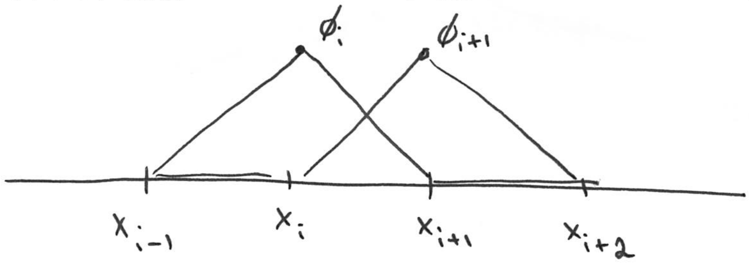
Hur gjorde vi i en dimension?

- För att lösa en diffekvation på ett intervall $I = [a,b]$ med FEM gjorde vi:

1. Delade in intervallet i delintervall och punkter.



2. Definierade hattfunktioner ϕ_i för varje x_i



- Dessa ϕ_i utgjorde en bas för alla styckvis linjära funktöner på $[a,b]$.

3. Approximera lösningen u som en styckvis linjär funktion (linjärkombination av ϕ_i)

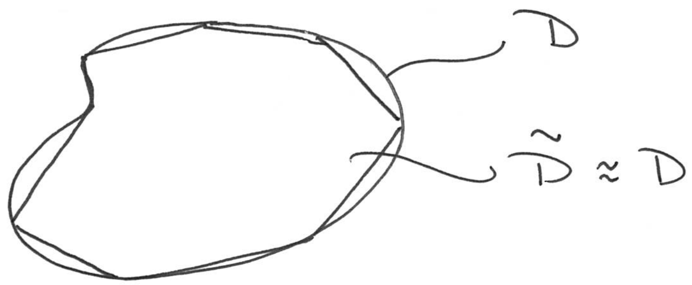
$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(x)$$

4. Satte in $U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(x)$ och $v = \phi_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ i svaga formen, vilket gav matrisekvation

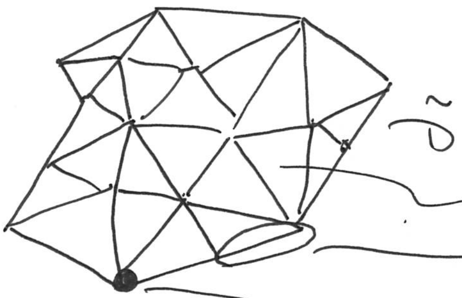
$$\underline{\underline{AU = b}}$$

Dags att göra motsvarande i 2-dim!

1. • Approximera vårt område D av en polygon.



• Dela in $\tilde{D}$ i trianglar



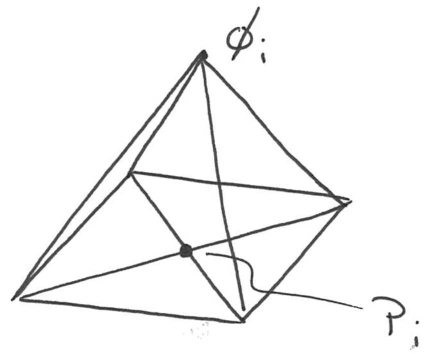
Vi får

trianglar
Kanter
Noder

kallas triangulering (mesh)

I varje nod $P_i = (x_i, y_i)$ definieras en att funktion (även kallad pyramidfunktion) $\phi_i(x,y)$ så att

$$\phi_i(P_j) = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$



- Dessa ϕ_i bildar en bas för alla styckvis linjära funktioner på $\tilde{D}$.

3. Approximera $u(x,y)$ med

$$u \approx U(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(x,y)$$

4. Bilda matrisekvation. Säg att vi har den svaga formen

Hitta u s.a.

$$\iint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, dA = \iint_D f v \, dA$$

för alla v.

Vi sätter in $u \approx U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i$ och $v = \phi_j$, $j = 1, \dots,$ och får:

$$VL = \iint_D a \nabla u \cdot \nabla \phi_j \, dA = \iint_D a \nabla \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i \right) \cdot \nabla \phi_j \, dA$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{linjäritet för} \\ \text{derivata och} \\ \text{integral} \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \iint_D a \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dA$$

$$HL = \iint_D f \phi_j \, dA$$

<u>Alltså</u>

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\iint_D a \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dA}_{= a_{ji}} = \underbrace{\iint_D f \phi_j \, dA}_{= b_j} \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ji} = b_j \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A \mathcal{U} = b}$$

där

$$\underbrace{A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Styvhetsmatris}}, \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad b = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\text{Lastvektor}}$$