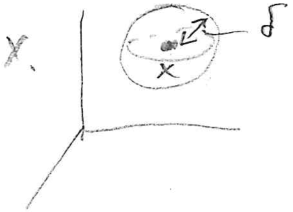
Idag: Funktioner, forts 1.1

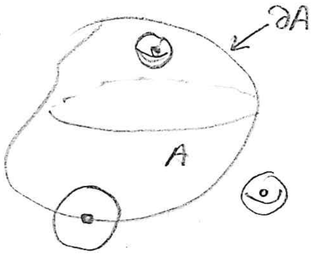
Def 1.2 Omgivning till $x \in \mathbb{R}^n$ är ett klot

$$B_\delta(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| \le \delta \}$$

med radie δ och centrum x.



Inre punkt x till $A \subseteq \mathbb{R}^n$:
har omgivning $B_\delta(x) \subseteq A$



Yttre punkt: har omgivn.

$B_\delta(x) \cap A = \emptyset$

Randpunkt: varken yttre eller inre punkt
(varje omgivning skär både A och $\mathbb{R}^n \setminus A$)

Randen $\partial A = \{$alla randpunkter$\}$

Obs: randpunkter till behöver ej tillhöra A.

Def 1.3 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är

öppen om alla punkter i A är inre punkter (ingen randpunkt $\in A$)

sluten om $\mathbb{R}^n \setminus A$ är öppen
(alla randpunkter $\in A$)

Def 1.4 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är en begränsad mängd

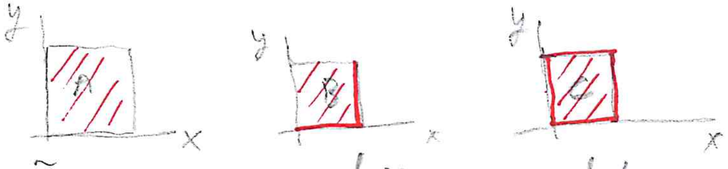
om $\exists R : A \subseteq B_R(0)$

(ligger i ett (stort) klot, radie R centrum i origo)

Ex $A = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$

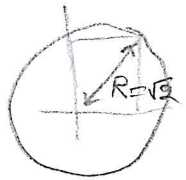
$B = \{(x,y) : 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y < 1\}$

$C = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$



öppen — varken öppen eller sluten — sluten

$\partial A = \partial B = \partial C =$ 

Begränsade: $A, B, C \subseteq B_{\sqrt{2}}(0)$ 

Konvergent följd $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ i $\mathbb{R}^n$:

$x_j \to \bar{x}$ om $\|x_j - \bar{x}\| \to 0$ då $j \to \infty$

Cauchy-följd: $\|x_i - x_j\| \to 0$ då $i, j \to \infty$

Obs: $|(x_j)_k - \bar{x}_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left((x_j)_k - \bar{x}_k\right)^2} = \|x_j - \bar{x}\| \to 0$

$\Rightarrow (x_j)_k \to \bar{x}_k \ \forall k \Rightarrow$ konvergerar komponentvis.

Det följer att $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ är konvergent $\Leftrightarrow (x_j)_{j=1}^{\infty}$ är Cauchy

precis som i $\mathbb{R}$.

Def 1.5 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{y}$$

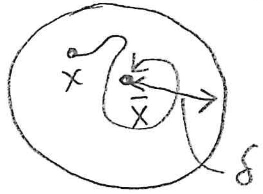
om $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < \|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \bar{y}\| < \varepsilon$

Def 1.6 f är kontinuerlig i $\bar{x} \in D(f)$ om

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \quad (\text{gränsvärdet} = \text{värdet})$$

Def 1.7 f är kontinuerlig om kont. i varje $x \in D(f)$.

Obs: x närmar sig $\bar{x}$ på <u>alla möjliga</u> sätt



<u>Ex</u> $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ när $(x,y) \to (0,0)$ (typ "$\frac{0}{0}$")

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) \neq (0,0)\}$

På x-axeln: $f(x,0) = 0 \to 0$ då $x \to 0$

På y-axeln: $f(0,y) = 0 \to 0$ då $y \to 0$

På linjen $y = x$: $f(x,x) = \dfrac{2x^2}{x^2+x^2} = 1 \to 1,\ x \to 0$

Gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ existerar ej.

(Testa även $y = x^2$, $f(x,x^2)$)

<u>Ex</u> $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$ då $(x,y) \to (0,0)$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (typ: "$\frac{0}{0}$")

Vi gissar $\lim f(x,y) = 0$

ty "$\dfrac{\text{grad } 3}{\text{grad } 2}$".

Bevis: $\left| \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \dfrac{2x^2|y|}{x^2+y^2} =$

$= \underbrace{\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}}_{\le 2} |y| \le 2|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\|(x,y)\|$

$\left| \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} \right| \le 2\|(x,y)\| \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$

$\Rightarrow \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$

Med ε, δ: $\forall \varepsilon > 0$ välj $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ och $\|(x,y)\| < \delta$

$\Rightarrow \left| \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} \right| \le 2\underbrace{\|(x,y)\|}_{<\delta} < 2\delta = \varepsilon$

I exemplet existerar ej $f(0,0)$, dvs $(0,0) \notin D(f)$. Alltså är f ej kont. i origo.

Men om vi omdefinierar f så här:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{om } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{om } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

så blir $D(f) = \mathbb{R}^2$ och f är kontinuerlig överallt.

Om vi definierar $f(0,0) = 1$ istället så blir $D(f) = \mathbb{R}^2$ men diskontinuerlig i $(0,0)$.

Def 1.8 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är Lipschitz-kontinuerlig på $A \subseteq \mathbb{R}^n$ om $\exists L_f$ sådan att

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L_f \|x - y\| \quad \forall x, y \in A$$

Obs: ε, δ blir enkelt då.

$\forall \varepsilon > 0$ tag $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L_f}$ och $\|x - \bar{x}\| < \delta$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(\bar{x})\| \leq L_f \|x - \bar{x}\| = L_f \delta = \varepsilon$$

Alltså: f kontinuerlig på A.

Ex $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 x_2$, $A = [-3,3] \times [-5,5]$

Beräkna en L_f.

norm i $\mathbb{R}$ är absol. belopp

$$\|f(x) - f(y)\| = |x_1 x_2 - y_1 y_2| =$$

$$= |x_1x_2 - y_1x_2 + y_1x_2 - y_1y_2|$$

triangelolikhet

$$\le |(x_1-y_1)x_2| + |y_1(x_2-y_2)|$$

$$= \underbrace{|x_1-y_1|}_{\le \|x-y\|}\,\underbrace{|x_2|}_{\le 5} + \underbrace{|y_1|}_{\le 3}\,\underbrace{|x_2-y_2|}_{\le \|x-y\|}$$

$$\le 8\,\|x-y\|$$

Alltså: $L_f = 8$.

Ex $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\|f(x)-f(y)\| = \|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\|$$

Visa: $\|A(x-y)\| \le L_f\|x-y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

Ekvivalent att visa

$$\|Ax\| \le L_f\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Skriv $z = Ax$, dvs $z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

Beräkna $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^m z_i^2$.

$$z_i^2 = \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big)^2 \le \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\,\|x\|^2$$

där vi använt Cauchy-Schwarz olikhet:

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$$

$$\Big|\sum_{j=1}^n x_jy_j\Big| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\,\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}$$

Till slut:

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^m z_i^2 \le \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

dvs $L_f = \sqrt{\sum\sum a_{ij}^2}$

<u>Sats 1.1</u> (Banachs fixpunktssats)

$g: A \to A$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, A sluten

$\|g(x) - g(y)\| \le L_g \|x-y\| \ \forall x, y \in A$

med $L_g < 1$

Då $\exists! \, \bar{x} \in A : \bar{x} = g(\bar{x})$.

$\bar{x} = \lim x_j$, $x_{j+1} = g(x_j)$, $x_0 \in A$.

<u>Bevis</u> som i $\mathbb{R}$. T.ex

$\|x_{j+1} - x_j\| = \|g(x_j) - g(x_{j-1})\| \le L_g \|x_j - x_{j-1}\|$

är första steget i att visa $\|x_j - x_i\| \to 0$ och därmed $\exists \, \bar{x} = \lim x_j$.

Nästa gång: derivata.