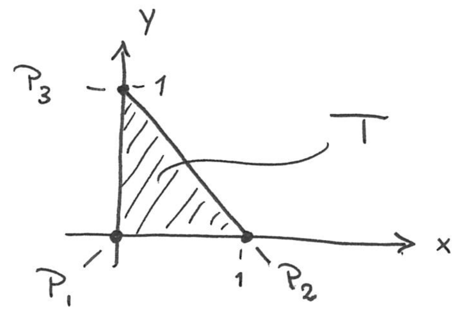
Hur beräknar vi t.ex. styvhetsmatrisen A?

Exempel: Ta fram styvhetsmatrisen för en triangel T.



$P_1 = (0,0)$

$P_2 = (1,0)$

$P_3 = (0,1)$

Steg 1: Bestäm hattfunktionerna ϕ_1, ϕ_2 och ϕ_3.

- Styckvis linjära $\Rightarrow$ generell form

$$\phi_i(x,y) = a + bx + cy$$

där a, b, c är konstanter vi ska ta fram.

För ϕ_1

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \phi_1(P_1) = \phi_1(0,0) = a \\ 0 = \phi_1(P_2) = \phi_1(1,0) = a+b \\ 0 = \phi_1(P_3) = \phi_1(0,1) = a+c \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_1(x,y) = 1 - x - y}$$

För ϕ_2:

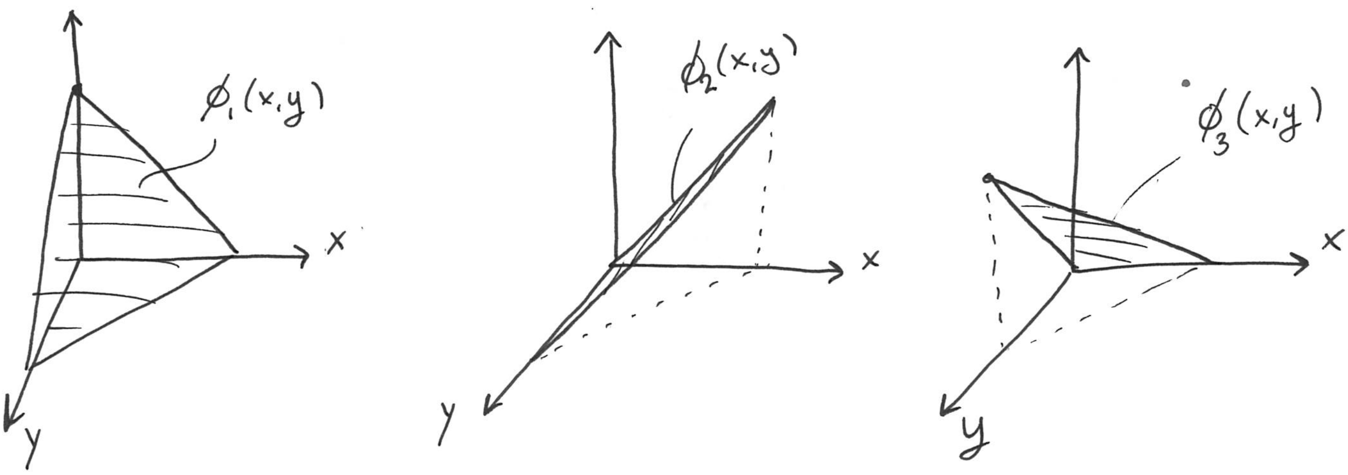
$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \phi_2(p_1) = \phi_2(0,0) = a \\ 1 = \phi_2(p_2) = \phi_2(1,0) = a+b \\ 0 = \phi_2(p_3) = \phi_2(0,1) = a+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi_2(x,y) = x}$$

För ϕ_3:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \phi_3(p_1) = \phi_3(0,0) = a \\ 0 = \phi_3(p_2) = \phi_3(1,0) = a+b \\ 1 = \phi_3(p_3) = \phi_3(0,1) = a+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi_3(x,y) = y}$$



Kom ihåg: Elementen i A är

$$a_{ji} = \iint_T \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \, dA$$

Behöver alltså $\nabla\phi_i$ för $i=1,2,3$.

$$\nabla\phi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \nabla\phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla\phi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna elementen!

$$a_{11} = \iint_T \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_1 \, dA = \iint_T \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=1+1=2} dA = 2 \underbrace{\iint_T dA}_{=\text{area av } T} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$$a_{12} = \iint_T \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2 \, dA = \iint_T \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=-1} dA = \ldots = -\frac{1}{2}$$

$$a_{21} = a_{31} = a_{13} = a_{12} = -\frac{1}{2}$$

$$a_{22} = \iint_T \nabla\phi_2 \cdot \nabla\phi_2 \, dA = \iint_T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dA = \ldots = \frac{1}{2}$$

$$a_{33} = a_{22} = \frac{1}{2}$$

$$a_{23} = a_{32} = \iint_T \nabla\phi_2 \cdot \nabla\phi_3 \, dA = \iint_T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=0} dA = 0.$$

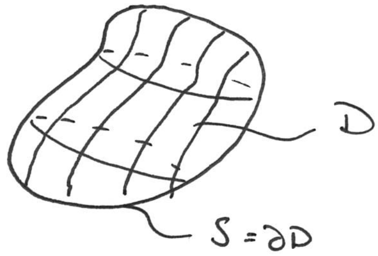
$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

Föreläsning

- Differentialekvationer används för att beskriva olika fysikaliska fenomen.
- Härledda från grundläggande lagar/principer.

Härledning av värmeledningsekvationen

- Vi kollar på tidsoberoende (steady state) värme-ledning i en kropp $D \subseteq \mathbb{R}^3$ med randyta $S \subseteq \mathbb{R}^3$.



- Beteckna

  $\mathbb{F}(x,y,z)$ - värmeflödestäthet $[J/m^2 s]$

  $f(x,y,z)$ - källtäthet för inre värmekällor $[J/m^3 s]$

- Låt $D_0 \subseteq D$ vara en godtycklig delvolym med randyta S_0 (Vanligt tillvägagångsätt för härledning av diffekvationer)

- Vi studerar två integraler:

$$\iint_{S_0} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS \leftarrow \text{Värmeflödet ut genom } S_0$$

$$\iiint_{D_0} f\,dV \leftarrow \text{Värmeproduktionen i } D_0$$

- Vi använder följande grundläggande princip:

Energiprincipen: (termodynamikens första huvudsats)

> Summan av det som flödar genom S_0 är lika med det som skapas inuti D_0.

En så kallad konserveringslag

Det vill säga:

$$\iint_{S_0} \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,dS = \iiint_{D_0} f\,dV$$

- Här kan vi använda Gauss sats på V.L.:

$$\iint_{S_0} \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,dS = \{\text{Gauss}\} = \iiint_{D_0} \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV$$

Vi får alltså:

$$\iiint_{D_0} \nabla \cdot \mathbb{F} \, dV = \iiint_{D_0} f \, dV$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\iiint_{D_0} (\nabla \cdot \mathbb{F} - f) \, dV = 0} \qquad (x)$$

Integralekvation

- Vill skriva om (x) som en differentialekvation.
- Då vi valde $D_0 \subseteq D$ godtyckligt, har vi att (x) ska vara uppfyllt för alla D_0.

  $\Rightarrow$ integranden $(\nabla \cdot \mathbb{F} - f)$ måste vara lika med 0, alltså

$$\nabla \cdot \mathbb{F} - f = 0.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbb{F} = f} \qquad (xx)$$

Sidospår:

$$\iiint_{D_0} v\,dV = 0 \quad \forall D_0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

Bevis: ∘ Bevisas genom att ~~att~~ anta motsatsen och finna en motsägelse.

- Antag $v(\tilde{p}) > 0$ för något $\tilde{p}$.
- Vi kan då välja D_0 som en liten omgivning till $\tilde{p}$ där $v(p) > 0 \quad \forall p \in D_0$.
- Isåfall skulle $\iiint_{D_0} v\,dV > 0$, vilket motsäger antagandet att $\iiint_{D_0} v\,dV = 0 \quad \forall D_0$.

$$\Rightarrow \quad v = 0 \text{ måste gälla.}$$

□

Tillbaka till härledningen.

- Dags att använda nästa grundläggande lag (en så kallad konstitutiv lag):

Fouriers lag:

$$\boxed{\mathbb{F} = -a \nabla u}$$

där

- $a(x,y,z)$ - värmeledningskoefficient $[J/mKs]$
- $u(x,y,z)$ - temperaturen $[K]$

där är

- $k(x,y,z)$ - värmeöverföringskoefficient för ytskiktet $[J/m^2 s K]$
- $u_A(x,y,z)$ - Omgivningens temperatur $[K]$
- $g(x,y,t)$ - flödestäthet för värme-källor på randen $[J/m^2 s]$

- Tillämpa Fouriers lag på V.L.:

$$\mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} = \{\text{Fourier}\} = -a\underbrace{\nabla u \cdot \hat{\mathbb{N}}}_{D_{\hat{N}} u} = -a D_{\hat{N}} u$$

- Randvillkoret blir alltså

$$a D_{\hat{N}} u + k(u - u_A) = g \qquad \text{(Robin-villkor)}$$

- Fallet $\underline{k=0}$ skulle motsvarande en perfekt isolerad yta, vilket skulle ge

$$a D_{\hat{N}} u = g \quad \text{på } S \qquad \text{(Neumann-villkor)}$$

- Fallet $k \to \infty$ motsvarar helt oisolerad yta och vi hade fått

$$u = u_A \quad \text{på } S \qquad \text{(Dirichlet-villkor)}$$

- Fouriers lag i ord:

> Värmeflödet $\mathbb{F}$ är proportionellt mot temperatur-gradienten ∇u (hur temperaturen ändras) och flödet blir större ju större värmeledningskoefficient.

- Notera: Värme flödar från varmt till kallt.

- Stoppa nu in Fouriers lag i (xx) och vi får att

$$\boxed{-\nabla\cdot(a\nabla u) = f}$$

vilket är värmeledningsekvationen.

Randvillkor för värmeledningsekvationen

- Randvillkor nödvändigt för att vi ska kunna lösa ekvationen.

- Randvillkoret bygger på följande relation.

$$\underbrace{\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}}_{\text{Värmeflödet ut genom randen}} = \underbrace{k(u-u_A)}_{\text{Temperaturskillnaden mellan yttre och inre temperatur gånger värmeöverföringskoefficienten}} - \underbrace{g}_{\text{inåtriktad värmekälla på randen}} \quad \text{på } S$$