Sammanfattning 1: alla dessa derivator

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är deriverbar i $\bar{x}$ om $\exists$ linjär avbildning $T(\bar{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ så att

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - T(\bar{x})(h)}{\|h\|} = 0$$

$$T(\bar{x}) = Df(\bar{x}) = f'(\bar{x})$$

Linjärisering:

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(h) + E_f(h,\bar{x})$$

Matrisen för $Df(\bar{x})(h) = Ah$: Jacobi

$$f'(\bar{x}) = Df(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f'_{1,1}(\bar{x}) & \dots & f'_{1,n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{m,1}(\bar{x}) & \dots & f'_{m,n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Partiella derivator:

$$f'_{i,j}(\bar{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})$$

Kolonn nr j:

$$f'(\bar{x})(e_j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

Linjärisering av f i $\bar{x}$:

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x})$$
$$= \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

Newtons metod: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(x) = 0$$

$$L_{x_j}[f](x) = 0 \qquad x = x_j + h$$

$$f(x_j) + f'(x_j)h = 0$$

$$f'(x_j)h = -f(x_j)$$

$$x_{j+1} = x_j + h = x_j - f'(x_j)^{-1}h$$

Kedjeregeln

speciellt fall

$$g(t) = f(u(t), v(t))$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = f_1'(u(t), v(t))\, u'(t) + f_2'(u(t), v(t))\, v'(t)$$

eller

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

allmän form

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$$
$$u = f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$
$$u(x) = f(g(x))$$
$$\underbrace{u'(\bar{x})}_{p \times n} = \underbrace{f'(g(\bar{x}))}_{p \times m}\, \underbrace{g'(\bar{x})}_{m \times n}$$

Deriverbar ⇒ Lipschitz

$$L_f = mn \max_{i,j} \max_{\xi \in A} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \right|$$

A konvex mängd

Högre ordning

exempel $\quad z = f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = (f_y')_x' = f_{yx}'' = f_{21}''$$

Blandade derivator är lika:

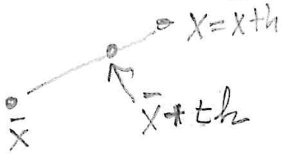
ex: $\quad f_{21}'' = f_{12}'', \quad f_{123}''' = f_{132}''' = f_{321}'''$

(utom för vissa "dåliga" funktioner)

Taylors formel

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x=\bar{x}+h$

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \tfrac{1}{2} h^T f''(\bar{x})h + E_2[f,\bar{x}](x)$$
$$= P_2[f,\bar{x}](x) + E_2[f,\bar{x}](x)$$



$$|E_2[f,\bar{x}](x)| \le K\|h\|^3$$

$$K \le c_n \max |f'''_{ijk}(\xi)|$$

$$F(t) = f(\bar{x}+th)$$
$$F(1) = F(0) + F'(0)1 + \tfrac{1}{2}F''(0)1^2 + E_2(t)$$

Hesse-matrisen:

$$f''(\bar{x}) = D^2 f(\bar{x}) = \left(f''_{ij}(\bar{x})\right)_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$D^2 f(\bar{x}) = D\left((Df)^T\right)(\bar{x})$$

$$P_2(x) = f(\bar{x}) + [\cdots]\,[\vdots] + \tfrac{1}{2}[\cdots]\,[\ddots]\,[\vdots]$$

Geometriska derivator

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

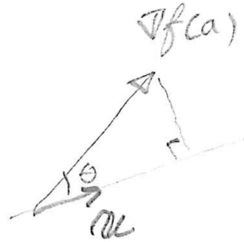
Riktningsderivata: u med $\|u\|=1$

$$D_u f(a) = \frac{d}{dt} f(a+tu)\Big|_{t=0} =$$

$$= \nabla f(a)\cdot u$$

$$= \|\nabla f(a)\| \cos(\theta)$$

skalära proj. av $\nabla f(a)$ på u



$\nabla\times\mathbf{F}=0$ nödvändigt villkor för existens av potential ϕ: $\nabla\phi = \mathbf{F}$

Optimering $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

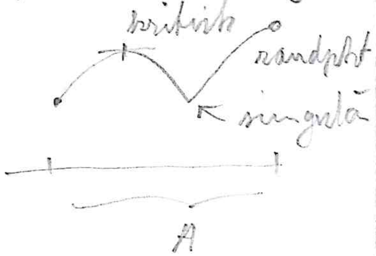
Extremvärde: lokalt max eller min

Globalt extremvärde: $\max_A f$, $\min f(x)$

Nödvändigt villkor för extremvärde i A:

antingen

- kritisk punkt: $f'(\bar{x}) = 0$
- singulär punkt: $f'(\bar{x})$ existerar ej
- randpunkt till A.



Extremvärdessats: f kont. i A och A kompakt (sluten och begränsad)
Då finns $\tilde{x} \in A$, $\hat{x} \in A$ så att
$$f(\tilde{x}) = \max_A f(x), \quad f(\hat{x}) = \min_A f(x)$$

Undersöka kritiska punkter:

Taylor grad 1:
$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \underbrace{f'(\bar{x})h}_{=0} + \underbrace{\tfrac{1}{2} h^T f''(\xi) h}_{\substack{>0 \\ <0}} \;?$$

- $f''(\bar{x})$ pos. def $\Rightarrow$ lokalt min i $\bar{x}$
- $f''(\bar{x})$ neg. def $\Rightarrow$ lokalt max
- $f''(\bar{x})$ indefinit $\Rightarrow$ sadelpunkt

Annars: ingen info

Beräkna egenvärdena för Hesse-matrisen.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Lös } f'(x)^T = 0 \\ \text{Beräkna:} \\ f''(x) = \\ = D(f'(x)^T) \end{array}}$$

Metod för max/min problem i A.

1. bestäm kritiska och singulära punkter i det inre av A
2. bestäm extrempunkter på ∂A
3. jämför alla

Lagranges multiplikatormetod

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

minimera/maximera $f(x)$

under bivillkoret $g(x) = 0$.

Sats Antag $\bar{x}$ är extrempunkt till $f(x)$ under $g(x) = 0$.
Antag: $g'(\bar{x}) \neq 0$.
Då finns $\bar{\lambda}$ så att $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ är kritisk punkt till

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

dvs

$$L'(x, \lambda)^T = \begin{bmatrix} f_1'(x) + \lambda g_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) + \lambda g_n'(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Randvärdesproblem

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) = f & \text{i } D \\ u = u_A & \text{på } S_1 \\ a D_N u + k(u - u_A) = g & \text{på } S_2 \end{cases}$$

$\mathbb{F} = -a \nabla u$ flödestäthet $\left[\frac{J}{m^2 s}\right]$

f källtäthet $\left[\frac{J}{m^3 s}\right]$

Svag formulering:

Finn u så att $u = u_A$ på S_1 och

$$\iiint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, dV + \iint_{S_2} k u v \, dS = \iiint_D f v \, dV + \iint_{S_2} (g + k u_A) v \, dS$$

för alla v med $v = 0$ på S_1.

Detta är grunden för FEM.