Idag: Derivata 1.2

1.2.1

En funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är deriverbar i $\bar{x}$ om

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h}=f'(\bar{x})$$

existerar. Kan skrivas

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-f'(\bar{x})h}{h}=0$$

Alltså: f är deriverbar i $\bar{x}$ om det finns tal $T(\bar{x})$ så att

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-T(\bar{x})h}{h}=0$$

Då är $T(\bar{x})=f'(\bar{x})=Df(\bar{x})=\frac{df}{dx}(\bar{x})$

Linjäriseringsformeln:

$$f(\bar{x}+h)=f(\bar{x})+f'(\bar{x})h+E_f(h,\bar{x})$$

(2) $$f(x)=f(\bar{x})+f'(\bar{x})(x-\bar{x})+E_f(x-\bar{x},\bar{x})$$

där linjäriseringsfelet

$$E_f(h,\bar{x})=f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-f'(\bar{x})h$$

uppfyller

$$\frac{E_f(h,\bar{x})}{h}\to 0 \text{ då } h\to 0$$

enligt (1).

(Om $f''(x)$ existerar i omgivning av $\bar{x}$ så blir (2) Taylors formel av ordning 1 med resttermen

$$E_f(h,\bar{x})=\frac{1}{2}f''(\xi)h^2$$

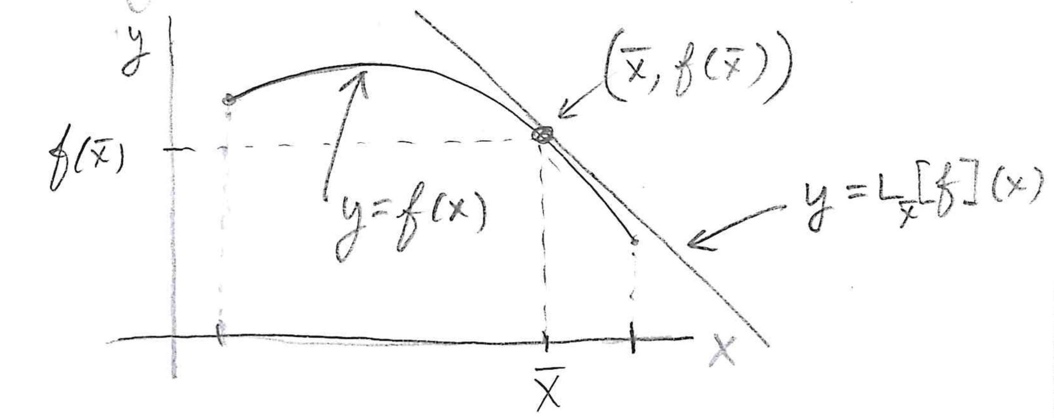
med ξ mellan $\bar{x}$ och x. Men vi har inte antagit att $f''(x)$ existerar!)

Linjäriseringen av f i $\bar{x}$:

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x})$$

(Taylors poly. av grad 1)

Tangent till graf:



1.2.2 Numerisk derivata

$$\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) + \underbrace{\frac{E_f(h,\bar{x})}{h}}_{\to 0 \text{ då } h \to 0}$$

$$f'(\bar{x}) \approx \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} \quad (h \approx 10^{-8})$$

Bättre:

$$f'(\bar{x}) \approx \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x}-h)}{2h} \quad (h \approx 10$$

1.2.3

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2)$

$h = x - \bar{x} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$

$h \to 0$ betyder $\|h\| \to 0$.

Def 1.9 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är deriverbar i $\bar{x}\in\mathbb{R}^2$ om $\exists$ linjär funktion $T(\bar{x}):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ så att

$$(3)\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-T(\bar{x})(h)}{\|h\|}=0$$

I så fall: $T(\bar{x})$ kallas derivatan av f i $\bar{x}$. Tecknas

$$T(\bar{x})=f'(\bar{x})=Df(\bar{x}).$$

Formeln (3) kan då skrivas

$$f(\bar{x}+h)=f(\bar{x})+f'(\bar{x})(h)+E_f(h,\bar{x})$$

där $\dfrac{E_f(h,\bar{x})}{\|h\|}\to 0$ då $h\to 0$.

f är deriverbar om deriverbar i varje $x\in D(f)$.

Matrisen för $f'(\bar{x}):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dvs $A\in\mathbb{R}^{1\times 2}$ så att $f'(\bar{x})(h)=Ah$.

Standardbasen i $\mathbb{R}^2$: $\{e_1,e_2\}$

$$h=h_1e_1+h_2e_2=h_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+h_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

$$f'(\bar{x})(h)\overset{\text{linjär}}{=}h_1f'(\bar{x})(e_1)+h_2f'(\bar{x})(e_j)$$
$$=\left[f'(\bar{x})(e_1),\ f'(\bar{x})(e_2)\right]\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}.$$

Bestäm $f'(\bar{x})(e_j)$, dvs kolonnerna.

Def 1.10 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är partiellt deriverbar i $\bar{x}$ om

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(\bar{x}_1+h_1,\bar{x}_2)-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{h_1}=f_1'(\bar{x})$$

$$\lim_{h_2\to 0}\frac{f(\bar{x}_1,\bar{x}_2+h_2)-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{h_2}=f_2'(\bar{x})$$

existerar.

Partiella derivator:

$$f_1'(\bar{x}) = f_{x_1}'(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})$$

$$f_2'(\bar{x}) = f_{x_2}'(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})$$

Med beteckning

$$z = f(x,y)$$

får vi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x'(x,y) = f_1'(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y'(x,y) = f_2'(x,y)$$

Ex $z = x^2y^3$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2$

Partiell derivata: "krokiga d"

Ordinär derivata: "raka d" $\frac{df}{dt}$

Sats 1.2 (Jacobi-matris)

Antag $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är deriverbar i $\bar{x}$. Då är f partiellt deriverbar i $\bar{x}$ och matrisen för $f'(\bar{x})$ ges av

$$[f'(\bar{x})(e_1), f'(\bar{x})(e_2)] = [f_1'(\bar{x}) \;\; f_2'(\bar{x})]$$

Den kallas Jacobi-matris. Tecknas

$$f'(\bar{x}) = Df(\bar{x}) = [f_1'(\bar{x}) \;\; f_2'(\bar{x})] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

(dvs samma som för derivatan)

Bevis: Tag $h = h_1 e_1$ (dvs $h_2 = 0$):

$$f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2) = f(\bar{x}) + h_1 f'(\bar{x})(e_1) + E_f(h_1 e_1, \bar{x})$$

$$f'(\bar{x})(e_1) = \underbrace{\frac{f(\bar{x}_1 + h_1) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h_1}}_{\to f_1'(\bar{x})} + \underbrace{\frac{E_f(h_1 e_1, \bar{x})}{h_1}}_{\to 0}$$

då $h_1 \to 0$.

Alltså: $f'(\bar{x})(e_1) = f_1'(\bar{x})$.

Tag $h = h_2 e_2 \Rightarrow f'(\bar{x})(e_2) = f_2'(\bar{x})$.

Identifiera derivatan $f'(\bar{x})$ med Jacobi-matrisen.

Skriv $f'(\bar{x})h$ (matris$*$vektor) istället för $f'(\bar{x})(h)$ (linjär funktion verkar på h).

Linjäriseringen av f i $\bar{x}$:

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h$$
$$= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x})$$

Ex (Tangent till graf)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Skriv (x,y,z) istället för (x_1,x_2,x_3) och (a,b) istället för $\bar{x}$.

Grafen till f: $z = f(x,y)$

Linjäriseringen till f i (a,b):

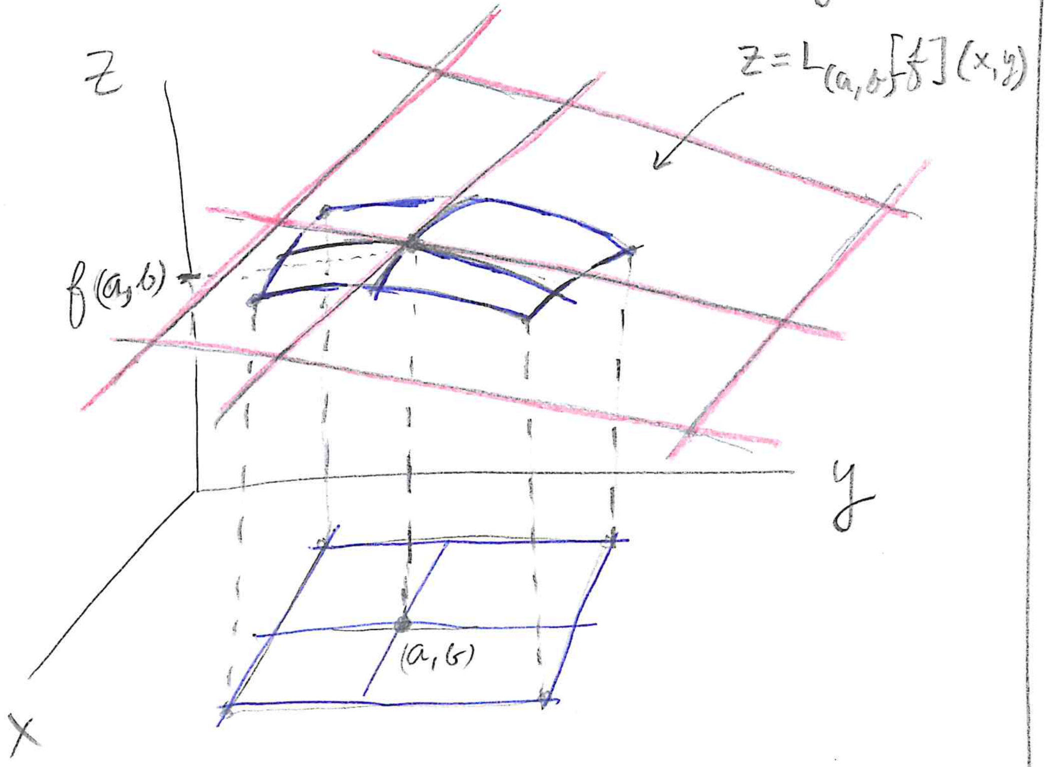
$$L_{(a,b)}[f](x,y) = f(a,b) + [f_x'(a,b), f_y'(a,b)] \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

Grafen till $L_{(a,b)}[f]$ är

$$z = L_{(a,b)}(x,y)$$
$$z = f(a,b) + f_x'(a,b)(x-a) + f_y'(a,b)(y-b)$$
$$-f_x'(a,b)(x-a) - f_y'(a,b)(y-b) + (z - f(a,b)) =$$

Plan genom $(a, b, f(a,b))$

Normalvektor: $(-f'_x(a,b), -f'_y(a,b), 1)$.



Ex $f(x) = x_1^2 x_2^5$, $\bar{x} = (3,1)$, $f(3,1) = 9$

$$f'(x) = [f'_1(x) \;\; f'_2(x)] = [2x_1x_5 \,,\, 5x_1^2x_2^4]$$

$$f'(3,1) = [6, 45]$$

$$L_{\bar{x}}[f](x) = 9 + [6, 45]\begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

Graf: $x_3 = x_1^2 x_2^5$

Tangentplanet i $(3,1,9)$:

$$x_3 = 9 + 6(x_1 - 3) + 45(x_2 - 1)$$

Normalvektor: $\begin{bmatrix} -45 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Mer allmänt: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Df(\bar{x}) = [f'_1(\bar{x}), \dots, f'_j(\bar{x}), \dots, f'_n(\bar{x})] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$f'_j(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$$

Sats 1.2: f deriverbar $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f partiellt deriverbar.

Det omvända gäller ej allmänt. Men för "snälla" f:

Sats 1.3 Antag att alla partiella derivator till f är kontinuerliga funktioner en en omgivning av $\bar{x}$. Då är f deriverbar i $\bar{x}$.

Utan bevis.

1.2.4 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$h = x - \bar{x} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - T(\bar{x})(h)}{\|h\|} = 0$$

$T(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = Df(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linjär

Jacobi-matrisen:

$$f'(\bar{x}) = Df(\bar{x}) = [f_1'(\bar{x}), \dots, f_j'(\bar{x}), \dots, f_n'(\bar{x})]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\bar{x}) & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Ex $f(x)=\begin{bmatrix} x_1^2 x_2^5 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\bar{x}=(3,1)$, $f(3,1)=\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$f'(x)=\begin{bmatrix} 2x_1x_2^5 & 5x_1^2x_2^4 \\ 0 & 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$f'(3,1)=\begin{bmatrix} 6 & 45 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_{\bar{x}}[f](x)=\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & 45 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-1 \end{bmatrix}$$

1.2.5 Numerisk derivata

Kolonn nr j i Jacobi-matrisen $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$ approximeras:

Tag $h=\delta e_j=\delta \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ nr j

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) \approx \frac{f(\bar{x}+\delta e_j)-f(\bar{x}-\delta e_j)}{2\delta}$$

Nästa gång: Newtons metod med mera.