Idag: Först 1.2.4 från F3
Newtons metod 1.3

Newtons metod

System av ekv.:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$f(x)=0$$

Icke-linjärt: ej på formen $Ax=b$
dvs $f(x)\neq Ax-b$. Annars: linjär algebra.

Skriv som fixpunktsekv:

$$x=g(x)$$

$n=1$: $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Newtons metod: $x_{j+1}=x_j-\dfrac{f(x_j)}{f'(x_j)}$

$n\geq 1$: Antag: $\exists \bar{x}$ lösning
och vi har approx. lösning $x_j\approx\bar{x}$
Söker bättre approx.

$$x_{j+1}=x_j+h$$

Lös den linjäriserade ekv. i x_j:

$$L_{x_j}(f)(x)=0$$

$$f(x_j)+f'(x_j)h=0$$

$$f'(x_j)h=-f(x_j)$$

Är på formen: $Ah = b$

med $A = f'(x_j) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$b = -f(x_j) \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$

Linjär algebra:

$$h = -A^{-1}b = -f'(x_j)^{-1}f(x_j)$$

Def 1.1 (Newtons metod)

$$x_{j+1} = x_j - f'(x_j)^{-1}f(x_j)$$

med x_0 nära $\bar{x}$.

Banachs fixpunktssats

med $g(x) = x - f'(x)^{-1}f(x)$.

Krävs: $L_g < 1$ i sluten mängd.

Behöver: $f'(x)$ inverterbar (icke-singulär) i omgivning av $\bar{x}$.

Annars: divergent iteration.

Behöver: x_0 tillräckligt nära $\bar{x}$.

Om konvergent så konvergerar den snabbt (kvadratiskt).

Bilda ej inversen $f'(x_j)^{-1}$.

Lös $f'(x_j)h = -f(x_j)$ (linjär algebra)

(Residualen: $-f(x_j) \approx 0$)

Algoritm 2

Indata: f, x_0, TOL

Utdata: $\hat{x}$ så att $\|f(\hat{x})\| \le TOL$

Villkor: $f(\bar{x}) = 0$, $f'(x)^{-1}$ existerar i omgivning av $\bar{x}$, x_0 nära $\bar{x}$

1. $x \leftarrow x_0$
2. $b \leftarrow -f(x)$
3. **while** $\|b\| > TOL$ **do**
4. $\quad b \leftarrow -f(x)$
5. $\quad A \leftarrow f'(x)$
6. $\quad h \leftarrow$ lösning till $Ah = b$
7. $\quad x \leftarrow x + h$
8. **end**
9. $\hat{x} \leftarrow x$

Behöver ej beräkna $f'(x)$ exakt.
Använd numerisk derivata
(algoritm 1).
Datorövning: skriv newton-lösare med numerisk derivata.

Ex 1.18
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2 & (1) \\ x_2 x_3 = x_3 & (2) \\ x_3^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow x_3 = \pm 1$, $(2) \Rightarrow x_2 = 1$, $(1) \Rightarrow x_1 = 0$

Två lösningar: $\bar{x} = (0,1,1)$, $\bar{x} = (0,1,-1)$.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \\ x_2 x_3 - x_3 \\ x_3^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Gissa: $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Residualen: $b = -f(1,1,1) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jacobi-matrisen:

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & x_3 & x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = f'(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Linjäriserade ekv. $Ah = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow h = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uppdatera: $x_1 = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(Närmare till $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.)

Sedan: $b = -f(\frac{1}{2},1,1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ osv.