Idag: Extremvärden 2.1

Optimering: Maximera eller minimera en kvantitet, t. ex. kostnad, temperatur ...

Dvs $\max f(x)$, $\min f(x)$.

Sortera många värden: kostsamt.

Genväg: $f'(x)=0$ i max eller min. punkt.

Ekvationssystem, Newton.

Matematiskt område: optimeringslära.

2.1 Extremvärden

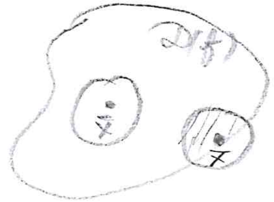
Def 2.1 (Extremvärde)

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ har lokalt maximum i $\bar{x}$ om $\exists\, B_\delta(\bar{x})$ så att

$$f(x)\le f(\bar{x})\quad \forall x\in B_\delta(\bar{x})\cap \mathcal{D}(f)$$

Globalt maximum i $\bar{x}$ om

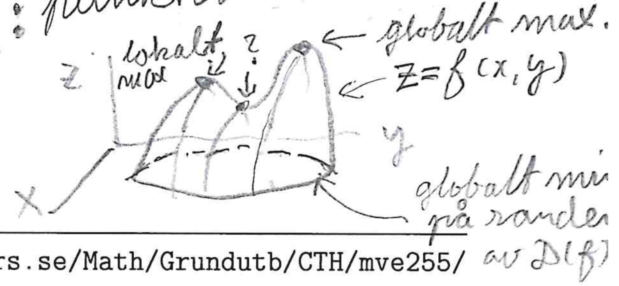
$$f(x)\le f(\bar{x})\quad \forall x\in \mathcal{D}(f)$$



Lokalt och globalt minimum på liknande sätt.

Extremvärde: maximum eller minimum, dvs $f(\bar{x})$.

Extrempunkt: punkten $\bar{x}$.



(? = sadelpunkt)

Ofta: söker $\max_{x \in A} f(x)$ eller $\min_{x \in A} f(x)$

med $A \subseteq D(f)$. Betrakta då

$f : A \to \mathbb{R}$. Globalt max: $\max_{x \in A} f(x)$.

Måste $\exists\, \bar{x} \in A$ så att $f(\bar{x}) = \max_{x \in A} f(x)$.

Sats 2.1 (Nödvändiga villkor för extremvärde)

Om $f : A \to \mathbb{R}$ har extremvärde i $\bar{x}$

så $\bar{x}$ en av

(a) kritisk punkt, dvs inre punkt till A där $f'(\bar{x}) = 0$

(b) singulär punkt, dvs inre punkt där $f'(x)$ ej existerar

(c) randpunkt till A

Bevis Antag $\bar{x}$ ej (a), (b) eller (c), dvs

inre punkt med $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Visa att ej extrempunkt.

Antag motsatsen, dvs extrempunkt.

Bilda $g(t) = f(\bar{x} + th)$, litet t, $h \in \mathbb{R}^n$,

så att $\bar{x} + th \in A$.

Då har g extrempunkt i $t = 0$,

så att $g'(0) = f'(\bar{x})h = 0 \quad \forall h$.

Omöjligt, ty $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Alltså: $\bar{x}$ ej extrempunkt.

Finns det globala max/min?

Sats 2.2 Om f kontinuerlig på sluten och begränsad (kompakt) mängd A, så har f globalt max och globalt min i A.

Exempel $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

$D(f) = \mathbb{R}^2$. Inga randpunkter och singulära punkter i $D(f)$.

Kritiska punkter:

$$f'(x) = [2x_1 \quad 2x_2] = [0, 0]$$

dvs

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

med lösning $\bar{x} = (0,0)$, kritisk punkt med värdet $f(0,0) = 0$.

Övriga värden: $f(x) \geq 0 \ \forall x$.

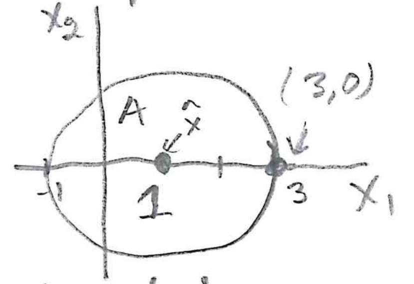
Alltså: globalt min i origo.

Inget max, ty $|f(x)| \to \infty$ då $\|x\| \to \infty$.

$D(f)$ är sluten men obegränsad (ej kompakt).

Exempel $f(x) = \|x\|^2$, $A = \{x : \|x - \hat{x}\| \leq 2\}$

$\hat{x} = (1,0)$, sluten disk (kompakt).



f ökar med avstånd till origo, max. är längst bort, $f(3,0) = 9$.

$\max_{x \in A} f(x) = f(3,0) = 9$ randpunkt

$\min_{x \in A} f(x) = f(0,0) = 0$ kritisk pkt

Exempel $f(x) = \|x\|^2$, $A = \{\|x - \hat{x}\| < 2\}$

öppen disk (ej kompakt).

Inget max, ty $(3,0) \notin A$. Minsta övre begränsning (supremum):

$$\sup_{x \in A} f(x) = 9$$

$$\min_{x \in A} f(x) = f(0,0) = 0$$

<u>Exempel</u> $f(x) = \|x\|^{-2} = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$

$A = \{x : \|x\| \geq 1\}$, sluten, obegränsad (ej kompakt).

Max. antages på $\partial A = \{\|x\| = 1\}$.

$|f(x)| \to 0$ då $\|x\| \to \infty$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x$

Inget min. Största undre begränsning (infimum):

$$\inf_{x \in A} f(x) = 0$$

$$\max_{x \in A} f(x) = 1 \quad \text{tas på } \partial A.$$

<u>Exempel</u> $f(x) = x_2^2 - x_1^2$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$.

Inga randpunkter, inga singulära punkter, en kritisk punkt $(0,0)$ med $f(0,0) = 0$.

Men f tar både pos. och neg. värden nära origo:

$$f(x_1, 0) = -x_1^2 < 0 \quad \text{om } x_1 \neq 0$$

$$f(0, x_2) = x_2^2 > 0 \quad \text{om } x_2 \neq 0$$

Kritisk punkt men varken lokalt max eller min. Kallas <u>sadelpunkt</u>.

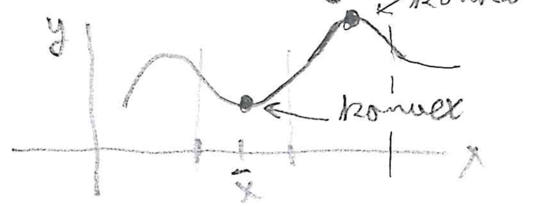
<u>Def</u> 2.2 (Sadelpunkt)

En kritisk punkt som är varken lokal maximipunkt eller lokal minimipunkt kallas <u>sadelpunkt</u>.

Hur avgöra om kritisk punkt är lokalt max, min eller sadelpunkt?

9.2 Kritiska punkter

En variabel: $f''(\bar{x}) > 0$ lokalt min i $\bar{x}$ (f är konvex i omgivn. av $\bar{x}$)



Även: $f''(\bar{x}) < 0 \Rightarrow$ lokalt max i $\bar{x}$
(konkav nära $\bar{x}$)

Flervariabel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
andraderivatan representeras av Hesse-matrisen, symmetrisk:

$$f''(x) = \begin{bmatrix} f''_{11}(x) & \cdots & f''_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ f''_{n1}(x) & \cdots & f''_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

Kvadratisk form: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g(x) = x^T A x$ med symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$g(x) = a_{11}x_1^2 + \underbrace{a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1}_{= 2a_{12}x_1x_2} + \cdots$$

Matrisen A kallas:

(a) positivt definit om $x^T A x > 0 \ \forall x \neq 0$

(b) negativt definit om $x^T A x < 0 \ \forall x \neq 0$

(c) indefinit om $x^T A x > 0$ för något x och $x^T A x < 0$ för ngt x.

Sats i linjär algebra:

(a) A pos. def. $\Leftrightarrow$ alla eg. värden $\lambda_k > 0$

(b) A neg. def $\Leftrightarrow$ alla eg. värden $\lambda_k < 0$

(c) A indefinit $\Leftrightarrow$ både $\lambda_k < 0$ och $\lambda_k > 0$.

Nu kan vi formulera sats som karakteriserar kritiska punkter med hjälp av $f''(\bar{x})$.