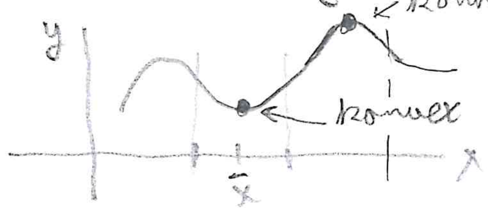
Idag: 2.2 Kritiska punkter
2.3 Max/min i begränsad mängd

2.2 Kritiska punkter

En variabel: $f''(\bar{x}) > 0$ lokalt min i $\bar{x}$ (f är konvex i omgivn. av $\bar{x}$)



Även: $f''(\bar{x}) < 0 \Rightarrow$ lokalt max i $\bar{x}$

(konkav nära $\bar{x}$)

Flervariabel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Andraderivatan representeras av Hesse-matrisen, symmetrisk:

$$f''(x) = \begin{bmatrix} f''_{11}(x) & \cdots & f''_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ f''_{n1}(x) & \cdots & f''_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

Kvadratisk form: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g(x) = x^T A x$ med symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$g(x) = a_{11} x_1^2 + \underbrace{a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1}_{= 2 a_{12} x_1 x_2} + \dots + a_{nn} x_n^2$$

Matrisen A kallas:

(a) positivt definit om $x^T A x > 0 \ \forall x \neq 0$

(b) negativt definit om $x^T A x < 0 \ \forall x \neq 0$

(c) indefinit om $x^T A x > 0$ för något x och $x^T A x < 0$ för ngt x.

Sats i linjär algebra:

(a) A pos. def. $\Leftrightarrow$ alla eg. värden $\lambda_k > 0$

(b) A neg. def $\Leftrightarrow$ alla eg. värden $\lambda_k < 0$

(c) A indefinit $\Leftrightarrow$ både $\lambda_k < 0$ och $\lambda_k > 0$.

Nu kan vi formulera sats som karakteriserar kritiska punkter med hjälp av $f''(\bar{x})$.

Sats 2.3 (Tillräckliga villkor för lokal extrempunkt)

Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har en kritisk punkt $\bar{x} \in \mathcal{D}(f)$.

Antag alla partiella derivator är kontinuerliga i omgivning till $\bar{x}$, så att Hesse-matrisen också är kontinuerlig.

Då gäller:

(a) $f''(\bar{x})$ positivt def. $\Rightarrow$ f har lokalt minimum i $\bar{x}$

(b) $f''(\bar{x})$ neg. def. $\Rightarrow$ lokalt max. i $\bar{x}$

(c) $f''(\bar{x})$ indefinit $\Rightarrow$ $\bar{x}$ är sadelpunkt

(d) annars: ingen information

Bevis Tag x i omgivningen av $\bar{x}$.

$F(t) = f(\bar{x} + th)$, $t \in [0,1]$, $h \in \mathbb{R}^n$

$h = x - \bar{x}$

$F(0) = f(\bar{x})$, $F(1) = f(\bar{x}+h) = f(x)$

Taylor ordning 1:

$$F(1) = F(0) + F'(0)\cdot 1 + \tfrac{1}{2} F''(s) 1^2$$

med $s \in [0,1]$. Detta är

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \tfrac{1}{2} h^T f''(\xi) h$$

med $\xi = \bar{x} + sh$. Men $f'(\bar{x}) = 0$:

$$f(x) = f(x+h) = f(\bar{x}) + \tfrac{1}{2} h^T f''(\xi) h$$

Antag $f''(\bar{x})$ positivt definit. Då är även $h f''(\bar{x}) h > 0 \quad \forall h \neq 0$.

$h^T f''(\xi) h > 0$ för ξ i omgivning av $\bar{x}$. Då fås

$$f(x) = f(x+h) = f(\bar{x}) + \tfrac{1}{2} \underbrace{h^T f''(\xi) h}_{>0} > f(\bar{x})$$

för alla $x \neq \bar{x}$ i omgivning av $\bar{x}$.

Detta bevisar (a). De andra visas analogt.

Obs: behöver strikt olikhet $h^T f''(\bar{x}) h > 0 \quad \forall h \neq 0$.

Om endast $h^T f''(\bar{x}) h \geq 0 \quad \forall h$ kan vi få $h^T f''(\bar{x}+sh) h < 0$ för något h.

Metod för undersökning av kritiska punkter

1. Plotta f (om det går). Grov info om kritiska punkter. Ger startpunkter för Newton.
2. Lös $f'(x)^T = 0$ med Newton.
3. För varje kritisk punkt, beräkna $f''(\bar{x})$ och dess egenvärden.

Ex 2.8 $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$

$$f'(x,y,z)^T = \begin{bmatrix} 2xy-2 \\ x^2+2yz \\ y^2+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (x,y,z) = (1,1,-\frac{1}{2})$.

$$f''(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{bmatrix}$$

$$f''(1,1,-\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-10) = 0$$

$2-\lambda = 0$, $\lambda^2-\lambda-10=0$

$\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+10} > 0$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+10} < 0$

Olika tecken: sadelpunkt

2.3 Extremvärden i begränsade mängd.

f kontinuerlig i kompakt mängd $A \Rightarrow \max_A f(x)$ och $\min_A f(x)$ existerar.

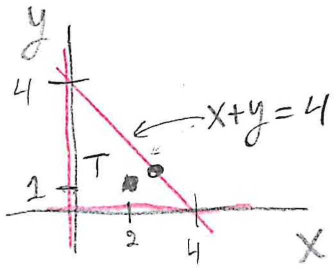
Metod

1. Bestäm alla kritiska punkter i det inre av A.
2. Bestäm alla extrempunkter på ∂A.
3. Jämför värdena i dessa punkter.

Ex 2.10 Max och min av

$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$$

på triangeln T.



1. $$\begin{cases} 2xy e^{-(x+y)} - x^2 y e^{-(x+y)} = 0 \\ x^2 e^{-(x+y)} - x^2 y e^{-(x+y)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(2-x) = 0 \\ x^2(1-y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \text{ eller } y=0 \text{ eller } x=2 \\ x=0 \text{ eller } y=1 \end{cases}$$

$x=0$, y godtycklig eller $x=2$, $y=1$

Kritiska punkter: $(0,y)$ y-axeln
$(2,1)$

Endast $(2,1)$ är inre punkt i T.
med $f(2,1) = 4e^{-3}$.

2. På randen $x=0$: $f(0,y)=0$
På randen $y=0$: $f(x,0)=0$

På randen $x+y=4$: $f(x,4-x) = x^2(4-x)e^{-4}$

Bilda $g(x) = x^2(4-x)e^{-4} = (4x^2-x^3)e^{-4}$, $x \in [0,4]$

Krit. pkt: $g'(x) = (8x-3x^2)e^{-4} = 0$

$$\Rightarrow x(8-3x)e^{-4} = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ eller } x = \frac{8}{3}$$

Endast $\frac{8}{3}$ är inre punkt i $[0,4]$

Värdet: $g\left(\frac{8}{3}\right) = f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{256}{7} e^{-4}$

Ändpunkter: $g(0) = f(0,4) = 0$
$g(4) = f(4,0) = 0$

3. Jämför värdena:

$$f(0,y) = f(x,0) = 0$$

$$f(2,1) = 4e^{-3} \approx 0{,}199$$

$$f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{256}{7} e^{-4} \approx 0{,}174$$

$$\max_T f = 4e^{-3}, \quad \min_T f = 0$$