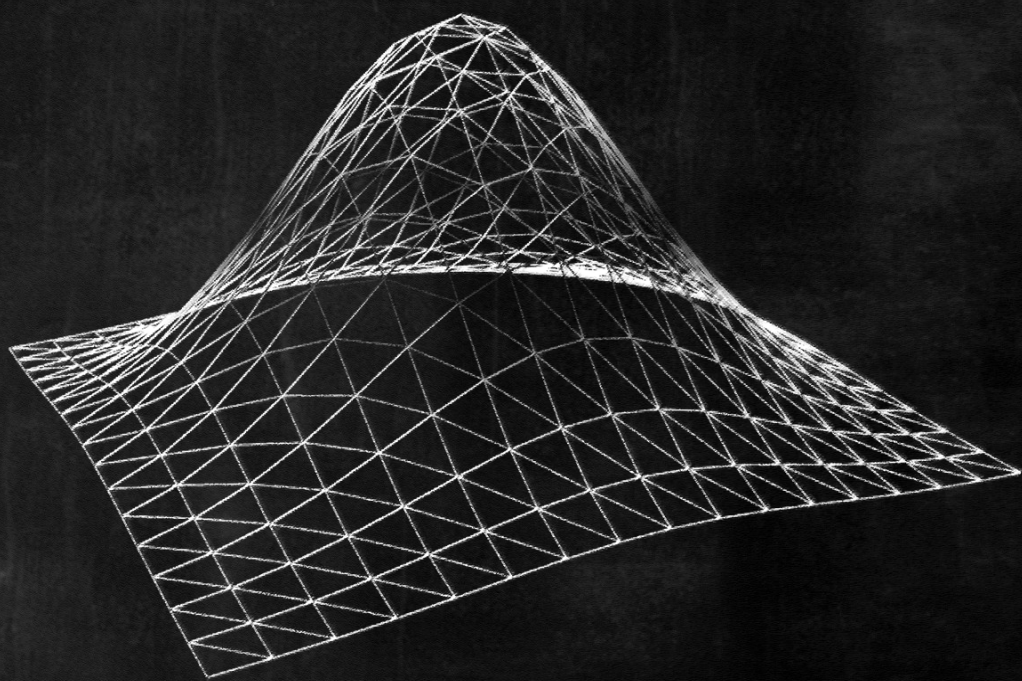


MATEMATISK ANALYS
& LINJÄR ALGEBRA



DEL IV: FLERVARIABELANALYS

STIG LARSSON, ANDERS LOGG & AXEL MÅLQVIST

Copyright © 2019 Stig Larsson, Anders Logg & Axel Målqvist

Kopiering förbjuden

Detta verk är skyddat av lagen om upphovsrätt. Ingen del av detta verk får reproduceras eller kopieras utan rättighetsinnehavarens skriftliga medgivande.

Art. No xxxxx

ISBN xxx-xx-xxxx-xx-x

Utgåva 0.0

Omslagsdesign av Anders Logg

Publicerad av Chalmers tekniska högskola

Tryckt i Göteborg

Innehåll

	Ekvationen $A(u) = f$	13
1	Differentialkalkyl	15
1.1	Funktioner av flera variabler	15
1.2	Linjärisering och derivata	22
1.2.1	Funktion av en variabel	23
1.2.2	Numerisk derivata	24
1.2.3	En funktion av flera variabler	24
1.2.4	Flera funktioner av flera variabler	27
1.2.5	Numerisk derivata igen	29
1.3	Newtons metod	30
1.4	Kedjeregeln	33
1.5	Derivator av högre ordning	38
1.6	Taylors formel	39
1.7	Gradient och riktningsderivata	42
1.8	Övningar	45
1.9	Problem	48
2	Optimering	51
2.1	Extremvärden	51
2.2	Kritiska punkter	54
2.3	Extremvärden i kompakta mängder	58
2.4	Lagranges multiplikatormetod	59
2.5	Övningar	64
2.6	Problem	65
3	Randvärdesproblem och finita elementmetoden i en variabel	67
3.1	Partiella differentialekvationer	67
3.2	Den stationära värmeledningsekvationen	68
3.3	Randvillkor	69
3.4	Randvärdesproblem	71

3.5	Svag formulering	74
3.6	Finita elementmetoden i 1-D	78
3.7	Problem	81
4	Multipelintegraler	83
4.1	Dubbelintegralen	83
4.2	Beräkning av dubbelintegralen	88
4.3	Variabelsubstitution i dubbelintegralen	91
4.4	Generaliserad dubbelintegral	95
4.5	Trippelintegralen	98
4.6	Variabelsubstitution i trippelintegralen	103
4.7	Medelvärden, moment	107
4.8	Övningar	110
4.9	Problem	112
5	Kurv- och ytintegraler	115
5.1	Kurvor	115
5.2	Kurvintegraler	120
5.3	Ytor	125
5.4	Ytintegraler	127
5.5	Grad, div, rot	132
5.6	Gauss divergenssats	135
5.7	Övningar	139
5.8	Problem	140
6	Randvärdessproblem och FEM i flera variabler	143
6.1	Partiell integration	143
6.2	Härledning av värmeledningsekvationen	145
6.3	Poissons ekvation	147
6.4	Svag formulering	148
6.5	Finita elementmetoden i 2-D	149
6.6	Problem	152

Appendix A: Grekiska alfabetet	153
Appendix B: Programmering	155
Facit	159
.1 Kapitel 1	159
.1.1 Övningar	159
.1.2 Problem	163
.2 Kapitel 2	164
.2.1 Övningar	164
.2.2 Problem	166
.3 Kapitel 3	167
.3.1 Problem	167
.4 Kapitel 4	168
.4.1 Övningar	168
.4.2 Problem	171
.5 Kapitel 5	171
.5.1 Övningar	171
.5.2 Problem	174
.6 Kapitel 6	175
Litteratur	176


Förord och läsanvisningar

Denna bok ger en introduktion till matematisk analys och linjär algebra för teknisk högskola. Boken bygger på föreläsninganteckningar från kurser vi föreläst på maskinprogrammet på Chalmers och vår ambition har varit att skriva en bok som ger en koncis och lättillgänglig men samtidigt rigorös beskrivning av det matematiska teoribygget, med tydliga kopplingar till modellering, beräkning, algoritmer och programmering.

Vår ambition har också varit att ge studenten en bok som kan läsas från pärm till pärm, istället för en tegelsten sprängfylld med exempel och utvecklingar; därav det kompakta formatet och det relativt sparsamma utrymme som ges åt lösta exempel.

Boken är strukturerad i fyra delar, med avsikt att varje del kan läsas som en 7,5 poängskurs. Varje del är i sin tur indelad i åtta kapitel, ett kapitel för vardera av Chalmers åtta läsveckor. De olika delarnas teman motiveras utifrån *ekvationslösning* som är ett centralt verktyg inom modellering och problemlösning i naturvetenskaperna och ingenjörskonsten. Upplägget kan därför sägas vara *problemmotiverat*. Varje del motiveras utifrån vår vilja att kunna lösa en viss klass av ekvationer: $f(x) = 0$ (skalära ickelinjära ekvationer; del I), $u' = f$ (integraler och ordinära differentialekvationer; del II), $Ax = b$ (system av linjära ekvationer; del III) och $A(u) = f$ (system av ickelinjära partiella differentialekvationer; del IV). Dessa teman bildar en röd tråd som löper genom texten, men notera att även om upplägget är problemmotiverat så är det *inte* problembaserat. Texten följer istället en traditionellt matematisk beskrivning med definition, sats och bevis. Den som så önskar kan därför välja att istället tänka på bokens olika delar som differentialkalkyl (del I), integralkalkyl (del II), linjär algebra (del III) och flervariabelanalys (del IV).

Bokens övningsuppgifter är indelade i "Övningar", "Problem" och "Datorövningar". Övningarna är "enkla" standarduppgifter på specifika teman och avsedda för kunskapskontroll och mängdträning, medan problemen kombinerar olika teman och kan kräva mer eftertanke. Datorövningarna innebär matematisk problemlösning med hjälp av dator (programmering). Dessa övningar kan utföras i vilket som helst programmeringsspråk och lösningar finns för såväl Python som MATLAB.

Avsnitt märkta med  lämpar sig för självstudier och kan läsas översiktligt. Bevis och övningar märkta med ★ är av lite mer utmanande karaktär och ingår normalt inte i en standardkurs för godkänt betyg. I övrigt är rekommendationen att läsa (och förstå!) boken i sin helhet och att arbeta flitigt med bokens övningar, problem och datorövningar. En lämplig omfattning kan vara att göra hälften av alla uppgifter; gör alla övningsuppgifter märkta (a) och (b) samt alla udda problem och datorövningar. Resterande uppgifter kan fungera som extra träning eller repetitionsmaterial inför tentamen.

Lycka till!

Författarna
Göteborg, 3 juni 2019

Tack!

Stort tack till de många studenter, övningsledare och kollegor som har läst, kommenterat och korrigerat tidiga utkast av boken: Robert Forslund, Tomas Forssmark, Hussein Hamoodi, Felix Held, Carl Lundholm, Douglas Molin, Raad Salman och Joel Sjögren. Speciellt tack till Joar Axås och Christoffer Hansson som bidragit med många av bokens övningsuppgifter.

Version: 3 juni 2019

Ekvationen $A(u) = f$

Läsperioden kan sägas handla om att lösa partiella differentialekvationer på formen $A(u) = f$. Den enklaste varianten är den stationära värmeledningsekvationen

$$-\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) = f(x) \quad (1)$$

1. Differentialkalkyl

1.1	Funktioner av flera variabler	15
1.2	Linjärisering och derivata	22
1.3	Newtons metod	30
1.4	Kedjeregeln	33
1.5	Derivator av högre ordning	38
1.6	Taylors formel	39
1.7	Gradient och riktningsderivata	42
1.8	Övningar	45
1.9	Problem	48

Vi studerar derivator av funktioner av flera variabler.

1.1 Funktioner av flera variabler

Vi börjar med att påminna om begreppet funktion från del I.

Definition 1.1 (Funktion, domän, kodomän, definitionsmängd, värdemängd)

En funktion $f: X \rightarrow Y$ är en *regel* som för varje *argument* x i en mängd X (funktionen *domän*) bestämmer ett *entydigt värde* $y = f(x)$ i en mängd Y (funktionen *kodomän*). Mängden $\mathcal{D}(f) \subseteq X$ av tillåtna argument kallas funktionens *definitionsmängd* och mängden $\mathcal{R}(f) \subseteq Y$ av möjliga värden kallas funktionens *värdemängd*.

Vi skriver även

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y \end{aligned} \tag{1.1}$$

I differentialekalkylen och integralkalkylen har vi i huvudsak studerat reellvärda funktioner av en variabel, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. I linjär algebra studerade vi *linjära funktioner* $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Exempel 1.1 (Linjär funktion) En linjär funktion (linjär avbildning, linjär transformation, linjär operator) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ har formen $f(x) = Ax$, där $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ är en matris. Här är $\mathcal{D}(f) = X = \mathbb{R}^n$ och $\mathcal{R}(f) = \text{Col}(A) \subseteq Y = \mathbb{R}^m$.

Exempel 1.2 (Reell funktion av två variabler) Volymen av en cirkulär cylinder med radien R och höjden h ges av $V = \pi R^2 h$. Detta kan skrivas som en funktion av typen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \pi x^2 y \quad \text{eller} \quad f(x) = \pi x_1^2 y_2 \quad (1.2)$$

Här är $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \subset X = \mathbb{R}^2$ och $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}_+ \subset Y = \mathbb{R}$, eftersom $R \geq 0$, $h \geq 0$ och $V \geq 0$ och kan antaga alla värden. ($\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$)

Exempel 1.3 (Vektorfält) Hastigheten i en vätskeströmning är en vektorkvantitet som kan variera från punkt till punkt i rummet och även med tiden, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$. Efter uppdelning i komponenter, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, får vi en funktion av typen $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Exempel 1.4 (Graf av funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) En funktion av typen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kan illustreras grafiskt genom att rita dess graf, dvs mängden av alla punkter (x, y) som uppfyller ekvationen

$$y = f(x) \quad (1.3)$$

Det är en punktmängd i \mathbb{R}^2 , typiskt en kurva.

Exempel 1.5 (Graf av funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) En funktion av typen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kan illustreras grafiskt genom att rita dess graf, dvs mängden av alla punkter (x, y, z) som uppfyller ekvationen

$$z = f(x, y) \quad (1.4)$$

Det är en punktmängd i \mathbb{R}^3 , typiskt en yta.

Exempel 1.6 (Nivåkurvor för funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) En funktion av typen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kan även illustreras genom att rita nivåkurvor, dvs

$$f(x, y) = C \quad (1.5)$$

för olika värden på konstanten C . Man får typiskt en skara av kurvor i planet. Till exempel, $x^2 + y^2 = C$ betyder en cirkel med radie \sqrt{C} om $C > 0$, en punkt (origo) om $C = 0$ och tomma mängden om $C < 0$.

Exempel 1.7 (Kurva i rummet) En vektorvärd funktion $\mathbf{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ genererar kurva på parameterform:

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.6)$$

På komponentform har vi $\mathbf{r} = F_x(t)\mathbf{e}_x + F_y(t)\mathbf{e}_y + F_z(t)\mathbf{e}_z$, dvs

$$\begin{cases} x = F_x(t), \\ y = F_y(t), \\ z = F_z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (1.7)$$

Vi ska nu studera allmänna funktioner $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Här är alltså funktionens domän $X = \mathbb{R}^n$ och kodomän $Y = \mathbb{R}^m$. Vi kommer att behöva begreppen konvergens, kontinuitet, öppen och sluten mängd. I \mathbb{R} baseras dessa på att man kan mäta avståndet mellan punkter med hjälp av absolutbelopp av tal, $|x - y|$. I \mathbb{R}^n mäter vi avstånd med hjälp av norm av vektor, $\|x - y\|$.

Vi tänker på $x \in \mathbb{R}^n$ som en punkt med koordinaterna $x = (x_1, \dots, x_n)$. Punkten kan också representeras av sin Ortsvektor från origo med komponenterna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

och avståndet från origo är normen av Ortsvektorn, dvs

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad (1.9)$$

Avståndet mellan två punkter x, y är då normen av vektorn $x - y$ dvs

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (1.10)$$

Notera att vi skriver komponenterna för en vektor som en kolonnmatris. En funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ skrivs då $y = f(x)$ eller $y = f(x_1, \dots, x_n)$ med $y \in \mathbb{R}^m$.

För det tre-dimensionella rummet \mathbb{R}^3 (och planet \mathbb{R}^2) kommer vi ofta att använda beteckningar från geometriska vektorer och skriva vektorer med fetstil. Då betecknas en punkt $P = (x, y, z)$ med Ortsvektorn

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.11)$$

En skalär funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skrivs då $w = f(x, y, z)$ eller $w = f(\mathbf{r})$.

Definition 1.2 (Omgivning, inre punkt, yttre punkt och randpunkt) En *omgivning* till en punkt $x \in \mathbb{R}^n$ är ett klot

$$B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\} \quad (1.12)$$

med radie $\delta > 0$ och med centrum i punkten x .

En *inre punkt* till en mängd $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är en punkt x sådan att det finns en omgivning $B_\delta(x)$ som ligger helt i A , dvs $B_\delta(x) \subseteq A$. En *yttre punkt* till en mängd $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är en punkt x sådan att det finns en omgivning $B_\delta(x)$ som ligger helt utanför A , dvs $B_\delta(x) \cap A = \emptyset$. En *randpunkt* till en mängd $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är en punkt som varken är en inre punkt eller yttre punkt. *Randen* ∂A till en mängd $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är mängden av alla dess randpunkter.

Definition 1.3 (Öppen och sluten mängd) En *öppen mängd* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är en mängd sådan att

$$\forall x \in A \exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subseteq A \quad (1.13)$$

Med andra ord, varje punkt $x \in A$ har en omgivning som ligger helt i A . En *sluten mängd* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ är en mängd sådan att dess *komplement* $\mathbb{R}^n \setminus A$ är en öppen mängd.

En öppen mängd är alltså en mängd som består endast av inre punkter. En sluten mängd är en mängd som innehåller hela sin rand. Den tomma mängden \emptyset och hela rummet \mathbb{R}^n är både öppna och slutna.

Definition 1.4 (Begränsad mängd) Mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är *begränsad* om

$$\exists R \in \mathbb{R} : \forall x \in A \|x\| \leq R \quad (1.14)$$

Med andra ord, mängden ligger i ett (stort) klot med centrum i origo, $A \subseteq B_R(0)$. En mängd som är sluten och begränsad kallas *kompakt*.

Exempel 1.8 (Öppna och slutna mängder) Vi betraktar tre mängder i \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \\ B &= \{(x, y) : 0 < x \leq 1, 0 \leq y < 1\} \\ C &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \end{aligned} \quad (1.15)$$

De är alla kvadrater. Vi ser att A är öppen, B är varken öppen eller sluten, och C är sluten. Randen är densamma för alla tre:

$$\begin{aligned} \partial A = \partial B = \partial C &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0 \text{ eller } y = 1\} \\ &\cup \{(x, y) : x = 0 \text{ eller } x = 1, 0 \leq y \leq 1\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

De är alla begränsade: de ligger i $B_R(0)$ med $R = \sqrt{2}$.

Definition 1.5 (Begränsad funktion) Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är *begränsad* om $\mathcal{R}(f)$ är en begränsad mängd i \mathbb{R}^m , dvs

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathcal{D}(f) \|f(x)\| \leq M \quad (1.17)$$

Talet M kallas för *begränsning* av f .

Genom att använda avståndet mellan punkter i \mathbb{R}^n istället för absolutbelopp av tal, kan vi nu

definiera konvergent följd $(x_j)_{j=0}^{\infty}$ i \mathbb{R}^n ,

$$\|x_j - \bar{x}\| \rightarrow 0 \quad \text{då } j \rightarrow \infty \quad (1.18)$$

och Cauchy-följd $(x_j)_{j=0}^{\infty}$ i \mathbb{R}^n ,

$$\|x_j - x_i\| \rightarrow 0 \quad \text{då } i, j \rightarrow \infty \quad (1.19)$$

Att $x_j \rightarrow \bar{x}$ då $j \rightarrow \infty$ innebär att komponenterna av x_j konvergerar mot komponenterna av \bar{x} , dvs $(x_j)_k \rightarrow \bar{x}_k$ för $k = 1, \dots, n$. Detta innebär i sin tur att en följd i \mathbb{R}^n är konvergent om och endast om den är en Cauchy-följd precis som för följder i \mathbb{R} .

Definition 1.6 (Gränsvärde) En funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ har gränsvärdet $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ i punkten $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ om

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \bar{y}\| < \epsilon. \quad (1.20)$$

Med andra ord, för varje (litet) tal $\epsilon > 0$ finns det ett (litet) tal $\delta > 0$ sådant att avståndet $\|f(x) - \bar{y}\|$ mellan funktionsvärdet $f(x)$ och gränsvärdet \bar{y} är mindre än ϵ om avståndet $\|x - \bar{x}\|$ mellan argumentet x och punkten \bar{x} är mindre än δ .

Detta skrivs

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \bar{y} \quad (1.21)$$

Definition 1.7 (Kontinuitet i en punkt) Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig i punkten $\bar{x} \in \mathcal{D}(f)$ om

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \quad (1.22)$$

Definition 1.8 (Kontinuitet) Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig om den är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd

Exempel 1.9 (Gränsvärde saknas) Låt $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$. Då är $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Vi undersöker gränsvärdet då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Gränsvärdet är av typ "0/0".

På x -axeln har vi $f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0 \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$.

På y -axeln har vi $f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0 \rightarrow 0$ då $y \rightarrow 0$.

På linjen $y = x$ har vi $f(x, x^2) = \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1 \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$.

Vi får alltså olika gränsvärden då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ längs olika vägar. Det betyder att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ inte existerar.

Exempel 1.10 (Gränsvärde) Låt $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$. Då är $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Vi undersöker gränsvärdet då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Gränsvärdet är av typ ” $\frac{0}{0}$ ”, men nu är funktionen en rationell funktion på formen ”polynom av grad 3/polynom av grad 2”, så täljaren går mot 0 fortare än nämnaren. Därför gissar vi att gränsvärdet är 0, dvs

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (1.23)$$

Bevis: Vi har

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{2x^2|y|}{x^2 + y^2} = 2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq 2|y| \leq 2\|(x, y)\| \quad (1.24)$$

där vi använt att $x^2/(x^2 + y^2) \leq 1$ för alla $x, y \neq 0$ och att $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$. Vi har alltså

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq 2\|(x, y)\| \rightarrow 0 \quad \text{då } (x, y) \rightarrow (0, 0) \quad (1.25)$$

vilket bevisar (1.23). Ett noggrannare bevis med ϵ, δ går så här: Tag godtyckligt $\epsilon > 0$ och välj $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ och $\|(x, y)\| < \delta$. Då fås

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq 2\|(x, y)\| < 2\delta = \epsilon \quad (1.26)$$

Exempel 1.11 (Kontinuerlig utvidgning) I exempel 1.10 har vi att $(0, 0) \notin \mathcal{D}(f)$. Därför är f ej kontinuerlig i origo. Men om vi utvidgar definitionen av f så här:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} & \text{om } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{om } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1.27)$$

så blir $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$ och f är kontinuerlig. Om vi definierar $f(0, 0) = 1$ istället, så blir $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$ men f blir diskontinuerlig i origo.

Definition 1.9 (Lipschitz-kontinuitet) Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är Lipschitz-kontinuerlig på mängden $A \subseteq \mathbb{R}^n$ om

$$\exists L_f > 0 \forall x, y \in A : \|f(x) - f(y)\| \leq L_f \|x - y\| \quad (1.28)$$

Vi säger att konstanten L_f är en Lipschitz-konstant för funktionen f .

Exempel 1.12 (Lipschitz-kontinuerlig funktion) Visa att funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, som definieras av $f(x) = x_1x_2$ är Lipschitz-kontinuerlig på rektangeln $A = [-3, 3] \times [-5, 5]$.

Vi beräknar en Lipschitz-konstant. Normen i \mathbb{R} är detsamma som absolutbeloppet så att vi får

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)\| = |x_1x_2 - y_1y_2| \\ &= |x_1x_2 - y_1x_2 + y_1x_2 - y_1y_2| \\ &= |(x_1 - y_1)x_2 + y_1(x_2 - y_2)| \\ &\leq |x_1 - y_1| |x_2| + |y_1| |x_2 - y_2| \\ &\leq 5|x_1 - y_1| + 3|x_2 - y_2| \\ &\leq 5\|x - y\| + 3\|x - y\| \\ &\leq 8\|x - y\| \end{aligned} \quad (1.29)$$

Här har vi använt att $|x_1| \leq \|x\|$ och $|x_2| \leq \|x\|$. Funktionen är alltså Lipschitz på A med konstanten $L_f = 8$. Se exempel 1.20 för en annan beräkning av Lipschitz-konstant för f .

Exempel 1.13 (En linjär funktion är Lipschitz-kontinuerlig) En linjär funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ har formen $f(x) = Ax$, där $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ är en matris, se Exempel 1.1. Vi får då $f(x) - f(y) = A(x - y)$ och det gäller att hitta en konstant L_f så att $\|A(x - y)\| \leq L_f \|x - y\|$ för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Om vi skriver $z = Ax$ så ska vi alltså visa $\|z\| \leq L_f \|x\|$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$.

Vi erinrar oss Cauchy-Schwarz olikhet:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (1.30)$$

vilket på komponentform blir

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} \quad (1.31)$$

Vi använder denna olikhet i summan $z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, för fixt i och efter kvadrering,

$$z_i^2 = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \|x\|^2 \quad (1.32)$$

Sedan får vi

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^m z_i^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \|x\|^2 \quad (1.33)$$

Vi drar slutsatsen att $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$, är Lipschitz-kontinuerlig på \mathbb{R}^n med konstanten $L_f = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$. Konstanten

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \quad (1.34)$$

kallas Frobenius-normen för matrisen.

Banachs fixpunktsats i \mathbb{R}^n kan nu formuleras och bevisas på samma vis som i \mathbb{R} . Bolzanos sats har dock ingen motsvarighet i \mathbb{R}^n . Varför?

Sats 1.1 (Banachs fixpunktssats) Antag att $g: A \rightarrow A$ är en kontraktionsavbildning på den slutna mängden $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dvs

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L_g \|x - y\| \quad \forall x, y \in A, \text{ med } L_g < 1 \quad (1.35)$$

Då har g en unik fixpunkt i A , det vill säga

$$\exists! \bar{x} \in A : \bar{x} = g(\bar{x}) \quad (1.36)$$

Fixpunkten fås som gränsvärde av fixpunktsiterationen $x_{j+1} = g(x_j)$ med $x_0 \in A$.

Bevis. Beviset är helt analogt med beviset i \mathbb{R} . Till exempel har vi

$$\|x_{j+1} - x_j\| = \|g(x_j) - g(x_{j-1})\| \leq L_g \|x_j - x_{j-1}\| \quad (1.37)$$

vilket är första steget i att bevisa att $(x_j)_{j=0}^\infty$ är en Cauchy-följd och därmed konvergent, dvs det finns \bar{x} så att $x_j \rightarrow \bar{x}$. \square

1.2 Linjärisering och derivata

1.2.1 Funktion av en variabel

Vi erinrar oss först definitionen av derivatan av en funktion av en variabel. En funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i \bar{x} om följande gränsvärde existerar:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) \quad (1.38)$$

Detta kan också skrivas på formen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h}{h} = 0 \quad (1.39)$$

Därför kan vi säga att en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ av en variabel är deriverbar i \bar{x} om det finns ett tal $T(\bar{x})$, sådant att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - T(\bar{x})h}{h} = 0 \quad (1.40)$$

Givetvis är $T(\bar{x})$ derivatan av f i \bar{x} :

$$T(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = Df(\bar{x}) = \frac{df}{dx}(\bar{x}) \quad (1.41)$$

Denna formulering ska vi använda när vi definierar derivatan av flervariabelfunktioner senare. Vi får också linjäriseringsformeln

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + E_f(h, \bar{x}) \quad (1.42)$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + E_f(x - \bar{x}, \bar{x}) \quad (1.43)$$

där vi använt beteckningarna $x = \bar{x} + h$, $h = x - \bar{x}$. Linjäriseringsfelet $E_f(h, \bar{x}) = f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h$ är litet då x är nära \bar{x} , närmare bestämt $E_f(x, \bar{x})/h \rightarrow 0$ när $h \rightarrow 0$ enligt (1.39).

Den första termen till höger i (1.42) eller (1.43), dvs $f(\bar{x})$, är konstant medan den andra termen

$$f'(\bar{x})h = f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (1.44)$$

är en linjär funktion av ändringen $h = x - \bar{x}$. Dessa två termer bildar *linjäriseringen av f i \bar{x}* ,

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (1.45)$$

Den räta linjen $y = L_{\bar{x}}[f](x)$, dvs $y = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$, är tangenten till kurvan (grafan) $y = f(x)$ i punkten $(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

Exempel 1.14 (Tangent till graf) Låt $f(x) = x^2$. Då är $f'(x) = 2x$ och linjäriseringen i $\bar{x} = 3$ är

$$L_3[f](x) = 9 + 6(x - 3) \quad (1.46)$$

Den räta linjen $y = 9 + 6(x - 3)$ är tangent till grafen $y = x^2$ i punkten $(3, 9)$.

1.2.2 Numerisk derivata

Vi repeterar kort hur man beräknar derivatan numeriskt (se avsnitt 4.7 i del I). Om vi dividerar (1.42) med h , så får vi

$$\frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) + E_f(h, \bar{x})/h \quad (1.47)$$

Här har vi att $E_f(h, \bar{x})/h \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$. Detta innebär att vi kan approximera derivatan med differenskvoten

$$f'(\bar{x}) \approx \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} \quad (1.48)$$

En bättre approximation fås av den symmetriska differenskvoten

$$f'(\bar{x}) \approx \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h} \quad (1.49)$$

Differenskvoterna i (1.48) and (1.49) är på formen "litet tal delat med litet tal". Om detta beräknas med avrundningsfel i ett datorprogram, så minskar felet i derivatan först när h minskar, men sedan växer felet när h blir mycket litet. Därför måste vi välja h "måttligt litet" här, se avsnitt 4.7 i del I. Man kan visa att med 16 decimalers noggrannhet (till exempel MATLAB) är det optimala valet för (1.48) $h = 10^{-8}$ och för (1.49) $h = 10^{-5}$.

1.2.3 En funktion av flera variabler

Låt först f vara en funktion av två variabler, dvs $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Vi vill imitera formeln i (1.40). Vi skriver $x = (x_1, x_2)$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $f(x) = f(x_1, x_2)$ och introducerar ändringsvektorn (inkrementet) $h = x - \bar{x} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ med normen $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$. Kom ihåg att $h \rightarrow 0$ betyder $\|h\| \rightarrow 0$.

Definition 1.10 (Derivata) Vi säger att en funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i \bar{x} , om det finns en linjär avbildning $T(\bar{x}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - T(\bar{x})(h)}{\|h\|} = 0 \quad (1.50)$$

I så fall kallas $T(\bar{x})$ derivatan av f i \bar{x} och vi skriver

$$T(\bar{x}) = Df(\bar{x}) = f'(\bar{x}) \quad (1.51)$$

Formeln (1.50) kan då skrivas

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(h) + E_f(h, \bar{x}) \quad (1.52)$$

där linjäriseringsfelet $E_f(h, \bar{x}) = f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(h)$ är mindre än de andra termerna då x är nära \bar{x} , närmare bestämt $E_f(h, \bar{x})/\|h\| \rightarrow 0$ när $h \rightarrow 0$.

En funktion sägs vara *deriverbar* om den är deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd.

Vi vet från linjär algebra att alla linjära avbildningar kan skrivas på matrisform $T(x) = Ax$, se Exempel 1.1. Vi bestämmer nu matrisen för derivatan $f'(\bar{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dvs matrisen $A \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ sådan att $f'(\bar{x})(h) = Ah$. Vi skriver $h = h_1e_1 + h_2e_2$ med standardbasen $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och undersöker vad $f'(\bar{x})$ gör med de två komponenterna var för sig, dvs

$$f'(\bar{x})(h_1e_1 + h_2e_2) = h_1f'(\bar{x})(e_1) + h_2f'(\bar{x})(e_2) = [f'(\bar{x})(e_1) \quad f'(\bar{x})(e_2)] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Matrisen är alltså $[f'(\bar{x})(e_1) \quad f'(\bar{x})(e_2)]$. Vi måste nu bestämma $f'(\bar{x})(e_j)$. Vi behöver först definiera partiella derivator.

Definition 1.11 (Partiell derivata) Vi säger att en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är partiellt deriverbar i \bar{x} , om följande gränsvärden existerar:

$$f'_1(\bar{x}) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h_1} \quad (1.54)$$

$$f'_2(\bar{x}) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + h_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h_2} \quad (1.55)$$

I så fall kallas $f'_1(\bar{x})$ och $f'_2(\bar{x})$ för partiella derivator av f med avseende på x_1 respektive x_2 . De tecknas också

$$f'_1(\bar{x}) = f'_{x_1}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \quad (1.56)$$

$$f'_2(\bar{x}) = f'_{x_2}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \quad (1.57)$$

På liknande sätt definierar vi partiella derivator av $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dvs $f'_j(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$, genom att derivera med avseende på x_j med de övriga variablerna fixerade.

Observera att *partiella derivata* skrivs med "krokiga d", $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$, till skillnad från *ordinära derivata* av envariabelfunktion som skrivs med "raka d", $\frac{df}{dt}(\bar{t})$.

Sats 1.2 (Jacobi-matris) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i \bar{x} . Då är f partiellt deriverbar och matrisen för derivatan $f'(\bar{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ges av de partiella derivatorna

$$[f'(\bar{x})(e_1) \quad f'(\bar{x})(e_2)] = [f'_1(\bar{x}) \quad f'_2(\bar{x})] \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad (1.58)$$

Denna kallas Jacobi-matris och vi tecknar den $f'(\bar{x}) = Df(\bar{x})$ med samma beteckning som derivatan, dvs

$$f'(\bar{x}) = Df(\bar{x}) = [f'_1(\bar{x}) \quad f'_2(\bar{x})] \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad (1.59)$$

Bevis. Om vi tar $h = h_1 e_1 = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i (1.52), så får vi

$$f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2) = f(\bar{x}) + h_1 f'(\bar{x})(e_1) + E_f(h_1 e_1, \bar{x}) \quad (1.60)$$

där $E_f(h_1 e_1, \bar{x})/h_1 \rightarrow 0$ då $h_1 \rightarrow 0$. Genom dividera med h_1 och sedan låta $h_1 \rightarrow 0$, får vi

$$f'(\bar{x})(e_1) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h_1} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{E_f(h_1 e_1, \bar{x})}{h_1} = f'_1(\bar{x}) \quad (1.61)$$

Det visar att den partiella derivatan $f'_1(\bar{x})$ existerar och är lika med $f'(\bar{x})(e_1)$. Genom att ta $h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}$ ser vi på liknande sätt att $f'(\bar{x})(e_2) = f'_2(\bar{x})$. \square

I fortsättningen kommer vi att identifiera derivatan med Jacobi-matrisen och skriva $f'(\bar{x})h$ (matris-vektor-multiplikation) istället för $f'(\bar{x})(h)$. Linjäriseringsformeln (1.52) blir då

$$\begin{aligned} f(x) = f(\bar{x} + h) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + E_f(h, \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \begin{bmatrix} f'_1(\bar{x}) & f'_2(\bar{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + E_f(h, \bar{x}), \quad h = x - \bar{x} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Observera att den första termen till höger, $f(\bar{x})$, är konstant med avseende på x . Den andra termen

$$f'(\bar{x})h = f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (1.63)$$

är en linjär funktion av inkrementet $h = x - \bar{x}$. Dessa termer bildar *linjäriseringen av f i \bar{x}* ,

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}). \quad (1.64)$$

Planet $x_3 = L_{\bar{x}}[f](x_1, x_2)$ är tangentplanet i punkten $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$ till ytan (grafan) $x_3 = f(x_1, x_2)$. Detta är lättare att se om vi skriver med beteckningar från geometri i rummet.

Exempel 1.15 (Tangent till graf) Vi byter beteckningar och skriver (x, y, z) istället för (x_1, x_2, x_3) och (a, b) istället för (\bar{x}_1, \bar{x}_2) . Grafen för f är ytan $z = f(x, y)$ och grafen till $L_{(a,b)}[f]$ är $z = L_{(a,b)}[f](x, y)$, dvs

$$\begin{aligned} z &= f(a, b) + \begin{bmatrix} f'_x(a, b) & f'_y(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix} \\ z &= f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) \end{aligned} \quad (1.65)$$

Om vi flyttar om termerna får vi

$$-f'_x(a, b)(x - a) - f'_y(a, b)(y - b) + (z - f(a, b)) = 0 \quad (1.66)$$

Detta är ekvationen för ett plan. Vi ser att $(a, b, f(a, b))$ är en punkt i planet och att $(-f'_x(a, b), -f'_y(a, b), 1)$ är en normalvektor. Det är tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$.

Exempel 1.16 (Linjärisering) Låt $f(x) = x_1^2 x_2^5$. Då har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^2 x_2^5) = 2x_1 x_2^5, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^2 x_2^5) = 5x_1^2 x_2^4 \quad (1.67)$$

så att $f'(x) = [2x_1 x_2^5 \quad 5x_1^2 x_2^4]$ och linjäriseringen av f i $\bar{x} = (3, 1)$ är

$$L_{\bar{x}}[f](x) = 9 + [6 \quad 45] \begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

Tangentplanet i $(3, 1, 9)$ till ytan $x_3 = x_1^2 x_2^5$ är

$$x_3 = 9 + 6(x_1 - 3) + 45(x_2 - 1) \quad (1.69)$$

Vektorn $(-6, -45, 1)$ är ortogonal mot planet.

Vi inser nu lätt att för $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ blir derivatan en linjär operator $f'(\bar{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ med Jacobi-matrisen

$$f'(\bar{x}) = Df(\bar{x}) = [f'_1(\bar{x}) \quad \cdots \quad f'_j(\bar{x}) \quad \cdots \quad f'_n(\bar{x})] \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (1.70)$$

Vi observerar att derivatan (om den existerar) kan betraktas som en matrisvärd funktion av x , dvs $f': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$, $x \mapsto f'(x)$. De partiella derivatorna f'_j är på liknande vis skalära funktioner av x , dvs $x \mapsto f'_j(x)$.

Vi såg i sats 1.2 att om f är deriverbar i \bar{x} så är f partiellt deriverbar i \bar{x} . Omvändningen gäller inte: det räcker inte att alla partiella derivator existerar för att funktionen skall vara deriverbar. Lite mer behövs enligt nästa sats.

Sats 1.3 (Deriverbarhet via partiella derivator) Antag att $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har partiella derivator f'_j , $j = 1, \dots, n$, som är kontinuerliga funktioner i någon omgivning till punkten \bar{x} . Då är f deriverbar i \bar{x} .

Vi utelämnar beviset.

1.2.4 Flera funktioner av flera variabler

Vi generaliserar nu till allmän funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Låt f_i vara m funktioner av n variabler x_j , dvs $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi skriver

$$h = x - \bar{x} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

På samma vis som tidigare säger vi att f är deriverbar i \bar{x} om det finns en linjär avbildning $T(\bar{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sådan att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - T(\bar{x})(h)}{\|h\|} = 0 \quad (1.72)$$

och vi skriver $T(\bar{x}) = Df(\bar{x}) = f'(\bar{x})$. Som tidigare blir matrisen för derivatan

$$f'(\bar{x}) = [f'(\bar{x})(e_1) \quad \cdots \quad f'(\bar{x})(e_j) \quad \cdots \quad f'(\bar{x})(e_n)] \quad (1.73)$$

där kolonnerna ges av de partiella derivatorna, dvs

$$f'(\bar{x})(e_j) = f'_j(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f'_{1,j}(\bar{x}) \\ \vdots \\ f'_{m,j}(\bar{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\bar{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1} \quad (1.74)$$

Vi identifierar alltså derivatan med Jacobi-matrisen

$$f'(\bar{x}) = Df(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f'_{1,1}(\bar{x}) & \cdots & f'_{1,n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{m,1}(\bar{x}) & \cdots & f'_{m,n}(\bar{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (1.75)$$

Vi får linjäriseringsformeln

$$f(x) = f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + E_f(h, \bar{x}), \quad h = x - \bar{x} \quad (1.76)$$

där linjäriseringfelet uppfyller $\|E_f(h, \bar{x})\|/\|h\| \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$. Linjäriseringen av f i \bar{x} är

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (1.77)$$

Exempel 1.17 (Linjärisering) Låt $f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2^5 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$. Då har vi

$$f'(x) = Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2^5 & 5x_1^2 x_2^4 \\ 0 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

I punkten $\bar{x} = (3, 1)$ får vi

$$f(3, 1) = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f'(3, 1) = \begin{bmatrix} 6 & 45 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.79)$$

och linjäriseringen i $\bar{x} = (3, 1)$ blir

$$L_{\bar{x}}[f](x) = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 45 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

Precis som för funktioner av en variabel har vi att deriverbarhet medför kontinuitet.

Sats 1.4 (Deriverbar medför kontinuerlig) Antag att $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är deriverbar i \bar{x} . Då är f kontinuerlig i \bar{x} .

Bevis. Linjäriseringsformeln (1.76) ger

$$f(x) - f(\bar{x}) = f'(\bar{x})h + E_f(h, \bar{x}), \quad h = x - \bar{x} \quad (1.81)$$

Vi tar norm på båda sidorna och använder att den linjära funktionen $h \mapsto f'(\bar{x})h$ är Lipschitz enligt exempel 1.13:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(\bar{x})\| &= \|f'(\bar{x})h + E_f(h, \bar{x})\| \leq \|f'(\bar{x})h\| + \|E_f(h, \bar{x})\| \\ &\leq L_{f'(\bar{x})}\|h\| + \frac{\|E_f(h, \bar{x})\|}{\|h\|}\|h\| \end{aligned} \quad (1.82)$$

Vi ser att högerledet går mot 0 då $\|h\| \rightarrow 0$. Det medför att vänsterledet också går mot 0, dvs att $f(x) \rightarrow f(\bar{x})$ då $x \rightarrow \bar{x}$. Det betyder att f är kontinuerlig i \bar{x} . \square

1.2.5 Numerisk derivata igen

För att approximera den j :te kolonnen $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$ av Jacobi-matrisen, väljer vi inkrementet $h = \delta e_j$, dvs

$$h = \delta e_j = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{rad nummer } j \quad (1.83)$$

Här är steglängden δ ett litet positivt tal och $e_j \in \mathbb{R}^n$ är den j :te basvektorn. Om vi använder inkrementet i en symmetrisk differenskvot, se (1.49), så får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) \approx \frac{f(\bar{x} + \delta e_j) - f(\bar{x} - \delta e_j)}{2\delta} \quad (1.84)$$

Observera att f är en kolonn så att resultatet är den j :te kolonnen i matrisen $f'(\bar{x})$. Kom ihåg att steglängden δ ska vara liten, men inte alltför liten.

Algorithm 1 Numerisk derivata**Indata:** Deriverbar funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, punkt $x \in \mathbb{R}^n$ och steglängd $\delta > 0$ **Utdata:** Matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ som approximerar Jacobi-matrisen $f'(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **Villkor:** $f'(x)$ existerar, δ liten men inte alltför liten

- 1: **for** $j = 1, \dots, n$ **do**
- 2: $e_j \leftarrow$ basvektor nr j
- 3: $h \leftarrow \delta e_j$
- 4: $A(:, j) \leftarrow (f(x + h) - f(x - h))/(2\delta)$
- 5: **end for**

1.3 Newtons metod

Vi betraktar ett system av n ekvationer med n obekanta:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1.85)$$

Vi skriver

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.86)$$

så att $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ och ekvationssystemet (1.85) blir

$$f(x) = 0 \quad (1.87)$$

Vi antar att systemet är *icke-linjärt*, dvs inte på formen $Ax = b$, dvs funktionen är inte på formen $f(x) = Ax - b$. Linjära ekvationssystem $Ax = b$ kan vi redan lösa med metoder från linjär algebra.

Vi erinrar oss från avsnitt 6.4 i del I att en ekvation på formen $f(x) = 0$ kan skrivas om som en fixpunktsekvation $x = g(x)$ och lösas med fixpunktsiteration. Det finns många sätt att göra denna omskrivning och vi erinrar oss också att $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ är ett bra val som leder till Newtons metod, $x_{j+1} = x_j - f(x_j)/f'(x_j)$.

Vi ska nu härleda Newtons metod för *icke-linjära system av ekvationer*, (1.87). Härledningen bygger på linjärisering av funktionen f .

Antag att systemet har en lösning \bar{x} och att vi har en approximativ lösning $x_j \approx \bar{x}$. Vi vill finna en bättre approximation $x_{j+1} = x_j + h$. I stället för att lösa (1.87) direkt, vilket oftast är omöjligt, löser vi den *linjäriserade ekvationen* i x_j , $L_{x_j}[f](x) = 0$, dvs

$$f(x_j) + f'(x_j)h = 0 \quad (1.88)$$

Vi betraktar denna som en ekvation för inkrementet h . Genom att flytta om termerna får vi

$$f'(x_j)h = -f(x_j) \quad (1.89)$$

Kom ihåg att Jacobi-matrisen $f'(x_j)$ är av typ $n \times n$ medan inkrementet h och $f(x_j)$ är av typ $n \times 1$. Vi måste alltså lösa ett *linjärt ekvationssystem* med n ekvationer och n obekanta för att bestämma h . Det är på formen $Ah = b$ med $A = f'(x_j)$ och $b = -f(x_j)$ och löses med metoder från linjär algebra. Sedan sätter vi $x_{j+1} = x_j + h$. Eftersom $h = -f'(x_j)^{-1}f(x_j)$, får vi följande iteration.

Definition 1.12 (Newtons metod) Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en deriverbar funktion. Newtons metod är en fixpunktsiteration på formen

$$x_{j+1} = x_j - f'(x_j)^{-1}f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.90)$$

med givet startvärde $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Vi hänvisar till Banachs fixpunktsats, sats 1.1, med $g(x) = x - f'(x)^{-1}f(x)$ där det krävs att Lipschitz-konstanten $L_g < 1$ i en sluten mängd. Som i del I måste vi antaga att startpunkten x_0 är tillräckligt nära en lösning \bar{x} , men det är svårt att precisera hur nära. Notera att vi multiplicerar med inversen $f'(x_j)^{-1}$ till Jacobi-matrisen. Det krävs därför att $f'(x)$ är inverterbar (icke-singulär) i någon omgivning av \bar{x} . Om $f'(x)$ är nära singulär (eller rentav singulär) så blir Lipschitz-konstanten L_g stor och iterationen divergerar eller konvergerar långsamt. Om $f'(x)$ inte är nära singulär, så konvergerar iterationen snabbt (kvadratisk).

I linjär algebra har vi lärt att det är ineffektivt att bilda inversa matrisen $f'(x_j)^{-1}$. I stället löser vi det linjära ekvationssystemet $f'(x_j)h = -f(x_j)$ med lämplig metod, till exempel Gauss eliminationsmetod. Vi får följande algoritm. Den producerar en approximation \hat{x} som löser ekvationen bra i den meningen att normen av *residualen* $f(\hat{x})$ blir mindre än den givna toleransen, $\|f(\hat{x})\| \leq \text{TOL}$. Likasom i del I kan man visa att *felet* $\|\hat{x} - \bar{x}\| \leq M\text{TOL}$, där konstanten M beror på hur nära singulär Jacobi-matrisen är.

Algoritm 2 Newtons metod

Indata: Deriverbar funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ och tolerans $\text{TOL} > 0$

Utdata: Approximativ lösning \hat{x} till ekvationen $f(x) = 0$ sådan att $\|f(\hat{x})\| \leq \text{TOL}$

Villkor: $f(\bar{x}) = 0$ för något $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $f'(x)$ är inverterbar i någon omgivning av \bar{x} och x_0 tillräckligt nära \bar{x}

- 1: $x \leftarrow x_0$
 - 2: $b \leftarrow -f(x)$
 - 3: **while** $\|b\| > \text{TOL}$ **do**
 - 4: $b \leftarrow -f(x)$ (beräkna residualen)
 - 5: $A \leftarrow f'(x)$ (beräkna Jacobi-matrisen)
 - 6: $h \leftarrow$ lösningen till $Ah = b$ (lös den linjäriserade ekvationen)
 - 7: $x \leftarrow x + h$ (uppdatera approximationen)
 - 8: **end while**
 - 9: $\hat{x} \leftarrow x$
-

Newtons metod är inte känslig för att man beräknar Jacobi-matrisen inexakt. Därför kan man ersätta derivatan $f'(x)$ i steg 5 med en numerisk derivata, se algoritm 1.

Exempel 1.18 (Newtons metod) Newtons metod är en datorberäkningsmetod, men för att förstå metoden bättre gör vi här ett exempel som är så enkelt att man kan genomföra några av beräkningarna för hand. Vi betraktar det icke-linjära systemet

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2 \\ x_2 x_3 = x_3 \\ x_3^2 = 1 \end{cases} \quad (1.91)$$

(Tredje ekvationen ger $x_3 = \pm 1$, andra ekvationen ger sedan $x_2 = 1$, och den första ekvationen ger $x_1 = 0$. Lösningarna är alltså $\bar{x} = (0, 1, 1)$ och $\bar{x} = (0, 1, -1)$. Första ekvationen betyder en sfär med radie $\sqrt{2}$ och centrum i origo. Andra ekvationen är unionen av två plan $\{x_3 = 0\} \cup \{x_2 = 1\}$. Tredje ekvationen är också unionen av två plan $\{x_3 = 1\} \cup \{x_3 = -1\}$. Vi ska finna punkter där dessa ytor skär varandra.)

Vi genomför ett steg av Newtons metod med startpunkt $x_0 = (1, 1, 1)$. Vi bildar funktionen

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \\ x_2 x_3 - x_3 \\ x_3^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

Residualen blir

$$b = -f(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

Vi beräknar Jacobi-matrisen

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & x_3 & x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix}, \quad A = f'(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

och ställer upp och löser det linjäriserade ekvationssystemet

$$Ah = b, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.95)$$

Slutligen uppdaterar vi approximationen

$$x_1 = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.96)$$

Vi kom lite närmare lösningen $\bar{x} = (0, 1, 1)$. I nästa steg får vi residualen $b = -f(0.5, 1, 1) = [-0.25, 0, 0]^T$; den är lite mindre än den förra. Iterationen fortsätter.

När man kör beräkningen på dator ser man att iterationen konvergerar men ganska långsamt. Förklaringen är att Jacobi-matrisen är singular i lösningen $\bar{x} = (0, 1, 1)$:

$$A = f'(0, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.97)$$

Matrisen är dock icke-singular i en omgivning av \bar{x} , men den är nära singular och Lipschitz-konstanten L_g är därför nära 1.

1.4 Kedjeregeln

Vi kommer ihåg från del I att derivatan av en sammansatt envariabelfunktion $g = f \circ u$, dvs $g(t) = f(u(t))$, ges av *kedjeregeln*:

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(u(t)) = f'(u(t))u'(t) \quad (1.98)$$

Här kallas f yttre funktion med den yttre derivatan $f'(u(t))$ och u inre funktion med den inre derivatan $u'(t)$. Med beteckningarna $y = f(x)$, $x = u(t)$ kan detta också skrivas

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (1.99)$$

Vi ska nu se hur kedjeregeln generaliseras till flervariabelfunktioner. Vi börjar med ett enkelt specialfall. Vi tänker oss en partikel som rör sig på ytan (se exempel 1.5)

$$z = f(x, y) \quad (1.100)$$

Om partikelns x, y -koordinater är

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \quad (1.101)$$

så är höjden vid tiden t

$$z = f(u(t), v(t)) \quad (1.102)$$

Här är $g(t) = f(u(t), v(t))$ en sammansatt funktion med yttre funktion f och två inre funktioner u, v . Vi vill bestämma höjdändringen per tidsenhet, dvs $\frac{dz}{dt}$ eller $g'(t)$.

Sats 1.5 (Kedjeregeln (speciellt fall)) Antag att funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar och att funktionerna $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbara. Då är den sammansatta funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som ges av $g(t) = f(u(t), v(t))$, också deriverbar med derivatan

$$g'(t) = \frac{d}{dt}f(u(t), v(t)) = f'_1(u(t), v(t))u'(t) + f'_2(u(t), v(t))v'(t) \quad (1.103)$$

Med beteckningen $z = f(x, y)$, $x = u(t)$, $y = v(t)$, kan detta också skrivas

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (1.104)$$

Vi bevisar en generell version av kedjeregeln senare. Notera att här har vi en yttre funktion f av två variabler med partiella derivator f'_1 , f'_2 . Den sammansatta funktionen g och de två inre funktionerna u , v är funktioner av en variabel med ordinära derivator g' , u' , v' . Alternativt: partiella derivator $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ och ordinära derivator $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$.

Man beräknar de yttre derivatorna i tur och ordning och multiplicerar med motsvarande inre derivata. Den mer kompakta varianten 1.104 är praktisk då funktionerna är givna som formler i x , y respektive t .

Exempel 1.19 (Kedjeregeln) Antag att $z = x^3 - 2xy$, där $x = t^2$ och $y = \cos(t)$. Vi använder den kompakta varianten 1.104 av kedjeregeln:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (3x^2 - 2y)(2t) + (-2x)(-\sin(t)) \\ &= 2t(3t^4 - 2\cos(t)) + 2t^2 \sin(t) \end{aligned} \quad (1.105)$$

I det här exemplet kan man lätt kontrollera genom att sätta in och bilda $z = x^3 - 2xy = t^6 - 2t^2 \cos(t)$ och sedan derivera detta uttryck med avseende på t utan kedjeregeln.

Obs att (1.103) kan skrivas som en matrisprodukt:

$$\frac{d}{dt}f(u(t), v(t)) = [f'_1(u(t)) \quad f'_2(v(t))] \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} \quad (1.106)$$

Detta är ingen tillfällighet, som vi strax ska se.

Nu tänker vi oss att de inre funktionerna är funktioner av två variabler:

$$g(s, t) = f(u(s, t), v(s, t)) \quad (1.107)$$

eller

$$z = f(x, y) \quad \text{med } x = u(s, t), \quad y = v(s, t) \quad (1.108)$$

Vi vill bestämma de två partiella derivatorna med avseende på s och t . Vi använder kedjeregeln för de två variablerna separat:

$$\begin{aligned} g'_1(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} f(u(s, t), v(s, t)) \\ &= f'_1(u(s, t), v(s, t))u'_1(s, t) + f'_2(u(s, t), v(s, t))v'_1(s, t) \\ g'_2(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} f(u(s, t), v(s, t)) \\ &= f'_1(u(s, t), v(s, t))u'_2(s, t) + f'_2(u(s, t), v(s, t))v'_2(s, t) \end{aligned} \quad (1.109)$$

eller

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.110)$$

På matrisform:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial s} f(u(s, t), v(s, t)) \quad \frac{\partial}{\partial t} f(u(s, t), v(s, t)) \right] \\ &= \left[f'_1(u(s, t), v(s, t)) \quad f'_2(u(s, t), v(s, t)) \right] \begin{bmatrix} u'_1(s, t) & u'_2(s, t) \\ v'_1(s, t) & v'_2(s, t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.111)$$

eller

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (1.112)$$

Vi kan nu formulera kedjeregeln i generell form.

Sats 1.6 (Kedjeregeln) Antag att $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ med $\bar{y} = g(\bar{x})$ och att derivatorna $g'(\bar{x})$ and $f'(\bar{y})$ existerar. Då är den sammansatta funktionen

$$u = f \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad u(x) = f(g(x)) \quad (1.113)$$

deriverbar i \bar{x} med derivatan

$$u'(\bar{x}) = f'(\bar{y})g'(\bar{x}), \quad \text{där } \bar{y} = g(\bar{x}) \quad (1.114)$$

Bevis. Att göras... [ingår ej i år]

□

Kedjeregeln är en produkt av Jacobi-matriser av typ $p \times n = (p \times m)(m \times n)$, närmare bestämt

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{y}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\bar{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\bar{y}) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(\bar{y}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (1.115)$$

Trots att detta uttrycks med hjälp av partiella derivator så räcker det inte att funktionerna f och g är partiellt deriverbara för att kedjeregeln ska gälla: de måste vara deriverbara, se definition 1.10.

För funktioner av en variabel kan man beräkna Lipschitz-konstanten med hjälp av derivata, $L_f = \max_{x \in I} |f'(x)|$. Motsvarande gäller också för flervariabelfunktioner. Vi behöver först definiera konvex mängd.

Definition 1.13 (Konvex mängd) Mängden $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas *konvex* om

$$x, y \in A \Rightarrow z(t) = x + t(y - x) \in A \quad \forall t \in [0, 1] \quad (1.116)$$

Med andra ord: om $x, y \in A$ så innehåller A alla punkter $z(t)$ på räta linjen som går från x till y .

Exempel på konvexa mängder: intervall $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, rektangel $[a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$, klot $B_R(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| \leq R\} \subseteq \mathbb{R}^n$. (Löst uttryckt: randen får inte bukta inåt.)

Sats 1.7 (En deriverbar funktion är Lipschitz) Om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är deriverbar i en konvex mängd A , så är f Lipschitz-kontinuerlig i A med konstanten

$$L_f = mn \max_{i,j} \max_{\xi \in A} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \right| \quad (1.117)$$

Bevis. (Avancerat.) Tag $x, y \in A$. Vi ska visa $\|f(y) - f(x)\| \leq L_f \|x - y\|$. Bilda $z(t) = x + t(y - x)$ för $t \in [0, 1]$. Då ligger $z(t)$ i A (konvex mängd) och envariabelfunktionen $F(t) = f(z(t))$, $t \in [0, 1]$, är definierad. Speciellt har vi $F(0) = f(x)$ och $F(1) = f(y)$.

Enligt fundamentalsatsen för funktioner i en variabel och triangulolikheten har vi

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &= \|F(1) - F(0)\| = \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt} F(t) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} F(t) \right\| dt \leq \max_{t \in [0,1]} \left\| \frac{d}{dt} F(t) \right\| \end{aligned} \quad (1.118)$$

Enligt kedjeregeln har vi här

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} f(z(t)) = f'(z(t))z'(t) = f'(z(t))(y - x) \quad (1.119)$$

ty $z'(t) = y - x$. Den i -te komponenten är i absolutbelopp

$$|(f'(z(t))(y - x))_i| = \left| \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z(t))(y_j - x_j) \right| \leq m \max_j \max_{\xi \in A} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \right| \|y - x\| \quad (1.120)$$

och normen blir

$$\begin{aligned} \|f'(z(t))(y - x)\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (f'(z(t))(y - x))_i^2} \leq n \max_i |(f'(z(t))(y - x))_i| \\ &\leq mn \max_i \max_j \max_{\xi \in A} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \right| \|y - x\| \end{aligned} \quad (1.121)$$

så att

$$\max_{t \in [0,1]} \left\| \frac{d}{dt} F(t) \right\| \leq mn \max_i \max_j \max_{\xi \in A} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \right| \|y - x\| \quad (1.122)$$

Insättning av denna olikhet i (1.118) avslutar beviset. \square

Olikheten i (1.121) ger en Lipschitz-konstant för $f'(\xi)$. Se också exempel 1.12 för en lite annorlunda beräkning av Lipschitz-konstant för $f'(\xi)$.

Vi upprepar exempel 1.12.

Exempel 1.20 (Lipschitz-kontinuerlig funktion) Visa att funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, som definieras av $f(x) = x_1 x_2$ är Lipschitz-kontinuerlig på rektangeln $A = [-3, 3] \times [-5, 5]$. Mängden A är konvex så vi kan använda sats 1.7.

Vi beräknar Jacobi-matrisen:

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (1.123)$$

Vi har $m = 1$, $n = 2$ och sats 1.7 ger

$$L_f = 1 \cdot 2 \max \left(\max_{x \in A} |x_2|, \max_{x \in A} |x_1| \right) = 2 \max(5, 3) = 10 \quad (1.124)$$

Lite sämre konstant än i exempel 1.12, men enklare beräkning. Med hjälp av Frobenius-normen i exempel 1.13 skulle vi få $L_f = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \leq 6$.

1.5 Derivator av högre ordning

Man kan naturligtvis derivera partiellt mer än en gång. Vi introducerar detta först för en funktion av typen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$. Vi kan bilda *rena andraderivator* med avseende på x och y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (f'_x)'_x(x, y) = f''_{xx}(x, y) = f''_{11}(x, y) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (f'_y)'_y(x, y) = f''_{yy}(x, y) = f''_{22}(x, y)\end{aligned}\quad (1.125)$$

och *blandade andraderivator* med avseende på x och y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (f'_y)'_x(x, y) = f''_{yx}(x, y) = f''_{21}(x, y) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = (f'_x)'_y(x, y) = f''_{xy}(x, y) = f''_{12}(x, y)\end{aligned}\quad (1.126)$$

På liknande vis kan man definiera rena och blandade partiella derivator av ordning 3, 4 och så vidare. Observera att vi använder många beteckningar för partiella derivator; det är viktigt kunna använda dem alla för de förekommer i litteraturen.

Exempel 1.21 (Partiella derivator av högre ordning) Låt $f(x, y, z) = z^2 e^{x-y}$. Vi beräknar några partiella derivator.

$$f'_1(x, y, z) = z^2 e^{x-y}, \quad f'_2(x, y, z) = -z^2 e^{x-y}, \quad f'_3(x, y, z) = 2ze^{x-y} \quad (1.127)$$

$$f''_{31}(x, y, z) = (f'_3)'_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(2ze^{x-y}) = 2ze^{x-y} \quad (1.128)$$

$$f''_{13}(x, y, z) = (f'_1)'_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}(z^2 e^{x-y}) = 2ze^{x-y} \quad (1.129)$$

$$f''_{33}(x, y, z) = (f'_3)'_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}(2ze^{x-y}) = 2e^{x-y} \quad (1.130)$$

$$f'''_{133}(x, y, z) = (f''_{13})'_3 = \frac{\partial}{\partial z}(2ze^{x-y}) = 2e^{x-y} \quad (1.131)$$

$$f'''_{331}(x, y, z) = (f''_{33})'_1 = \frac{\partial}{\partial x}(2e^{x-y}) = 2e^{x-y} \quad (1.132)$$

Observera att $f''_{31} = f''_{13}$ och $f'''_{133} = f'''_{331}$ här. Det är ingen slump.

Sats 1.8 (Blandade derivator är lika) Antag att två blandade derivator består av samma partiella derivator men tagna i olika ordning. Om dessa blandade derivator är kontinuerliga i \bar{x} och om alla derivator av lägre ordning är kontinuerliga i en omgivning av \bar{x} så är de två derivatorna lika i \bar{x} .

Vi utelämnar beviset. Här är en enklare (men lite svagare) formulering:

Sats 1.9 (Blandade derivator är lika) Om alla partiella derivator till en funktion är kontinuerliga i en omgivning till punkten \bar{x} , så spelar det ingen roll i vilken ordning man beräknar de partiella derivatorna i punkten \bar{x} .

Vi utelämnar beviset.

Exempel 1.22 (Vågekvationen) Visa att funktionen

$$w(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.133)$$

uppfyller vågekvationen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.134)$$

Här är f och g godtyckliga envariabelfunktioner, c en positiv konstant och x och t rumskoordinaten respektive tiden. Termen $f(x - ct)$ betyder en våg med profilen $y = f(x)$ som rör sig åt höger längs x -axeln med farten c . Termen $g(x + ct)$ är en våg som rör sig åt vänster. Vi beräknar derivatorna i (1.134) med hjälp av kedjeregeln. Vi har

$$w'_x(x, t) = f'(x - ct) + g'(x + ct), \quad (1.135)$$

$$w''_{xx}(x, t) = f''(x - ct) + g''(x + ct) \quad (1.136)$$

$$w'_t(x, t) = -cf'(x - ct) + cg'(x + ct), \quad (1.137)$$

$$w''_{tt}(x, t) = c^2 f''(x - ct) + c^2 g''(x + ct) \quad (1.138)$$

Alltså: $w''_{tt} = c^2 w''_{xx}$.

1.6 Taylors formel

Vi ska härleda Taylors formel av ordning 2 för flervariabelfunktioner.

Vi erinrar oss Taylors formel av ordning 2 för en envariabelfunktion F i punkten \bar{t} (se Taylors sats, sats 5.2 i del I):

$$F(t) = F(\bar{t}) + F'(\bar{t})(t - \bar{t}) + \frac{1}{2}F''(\bar{t})(t - \bar{t})^2 + E_2[F, \bar{t}](t) \quad (1.139)$$

där resttermen ges av $E_2[F, \bar{t}](t) = \frac{1}{6}F'''(s)(t - \bar{t})^3$ för något s mellan t och \bar{t} . Taylors polynom för F i punkten \bar{t} är

$$P_2[F, \bar{t}](t) = F(\bar{t}) + F'(\bar{t})(t - \bar{t}) + \frac{1}{2}F''(\bar{t})(t - \bar{t})^2 \quad (1.140)$$

Det är det unika polynom av grad 2 sådant att

$$P_2[F, \bar{t}](\bar{t}) = F(\bar{t}), \quad P_2[F, \bar{t}]'(\bar{t}) = F'(\bar{t}), \quad P_2[F, \bar{t}]''(\bar{t}) = F''(\bar{t}) \quad (1.141)$$

dvs derivatorna till och med ordning 2 stämmer överens i \bar{t} .

Med beteckningen $t = \bar{t} + h$ kan vi skriva (1.139) på kompakt form:

$$F(\bar{t} + h) = F(\bar{t}) + F'(\bar{t})h + \frac{1}{2}F''(\bar{t})h^2 + E_2[F, \bar{t}](t) \quad (1.142)$$

med $E_2[F, \bar{t}](t) = \frac{1}{6}F'''(s)h^3$.

Nu generaliserar vi till en två-variabelfunktion, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, och skriver

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \bar{x} + h = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (1.143)$$

Vi bildar en envariabelfunktion genom att evaluera f längs den räta linjen genom \bar{x} och x :

$$F(t) = f(\bar{x} + th), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.144)$$

Då har vi $F(0) = f(\bar{x})$ och $F(1) = f(\bar{x} + h) = f(x)$. Vi skriver ned Taylors formel för F i punkten 0 med $t = 1$:

$$F(1) = F(0) + F'(0)1 + \frac{1}{2}F''(0)1^2 + \frac{1}{6}F'''(s)1^3 \quad (1.145)$$

Vi beräknar derivatorna med hjälp av kedjeregeln:

$$F'(t) = \frac{d}{dt}f(\bar{x} + th) = f'_1(\bar{x} + th)h_1 + f'_2(\bar{x} + th)h_2 \quad (1.146)$$

$$F'(0) = f'_1(\bar{x})h_1 + f'_2(\bar{x})h_2 = \begin{bmatrix} f'_1(\bar{x}) & f'_2(\bar{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = f'(\bar{x})h \quad (1.147)$$

och

$$F''(t) = \frac{d}{dt} \left(f'_1(\bar{x} + th)h_1 + f'_2(\bar{x} + th)h_2 \right) \quad (1.148)$$

$$= f''_{11}(\bar{x} + th)h_1^2 + f''_{12}(\bar{x} + th)h_1h_2 + f''_{21}(\bar{x} + th)h_2h_1 + f''_{22}(\bar{x} + th)h_2^2 \quad (1.149)$$

$$F''(0) = f''_{11}(\bar{x})h_1^2 + 2f''_{12}(\bar{x})h_1h_2 + f''_{22}(\bar{x})h_2^2 \quad (1.150)$$

$$= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{11}(\bar{x}) & f''_{12}(\bar{x}) \\ f''_{12}(\bar{x}) & f''_{22}(\bar{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = h^T f''(\bar{x})h \quad (1.151)$$

Här har vi använt att $f''_{12}(\bar{x}) = f''_{21}(\bar{x})$ enligt sats 1.9 och infört *Hesse-matrisen*

$$f''(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f''_{11}(\bar{x}) & f''_{12}(\bar{x}) \\ f''_{21}(\bar{x}) & f''_{22}(\bar{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f''_{11}(\bar{x}) & f''_{12}(\bar{x}) \\ f''_{12}(\bar{x}) & f''_{22}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (1.152)$$

Taylors polynom av grad 2 för f i punkten \bar{x} är alltså:

$$P_2[f, \bar{x}](x) = P_2[f, \bar{x}](\bar{x} + h) \quad (1.153)$$

$$= f(\bar{x}) + f'_1(\bar{x})h_1 + f'_2(\bar{x})h_2 + \frac{1}{2}(f''_{11}(\bar{x})h_1^2 + 2f''_{12}(\bar{x})h_1h_2 + f''_{22}(\bar{x})h_2^2) \quad (1.154)$$

$$= f(\bar{x}) + \begin{bmatrix} f'_1(\bar{x}) & f'_2(\bar{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{11}(\bar{x}) & f''_{12}(\bar{x}) \\ f''_{12}(\bar{x}) & f''_{22}(\bar{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (1.155)$$

$$= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}h^T f''(\bar{x})h \quad (1.156)$$

Detta är ett polynom av grad 2 i variablerna x_1, x_2 . Den andra termen $f'(\bar{x})h$ är en linjär funktion av h och den tredje termen $\frac{1}{2}h^T f''(\bar{x})h$ är en *kvadratisk form* i h .

Genom att beräkna $F'''(s)$ får vi resttermen

$$\begin{aligned} E_2[f, \bar{x}](x) &= \frac{1}{6}F'''(s) \\ &= \frac{1}{6} \left(f'''_{111}(\xi)h_1^3 + 3f'''_{112}(\xi)h_1^2h_2 + 3f'''_{122}(\xi)h_1h_2^2 + f'''_{222}(\xi)h_2^3 \right) \end{aligned} \quad (1.157)$$

där $\xi = \bar{x} + sh$ är en (okänd) punkt mellan \bar{x} och x . Vi får begränsningen

$$|E_2[f, \bar{x}](x)| \leq K\|h\|^3 \quad (1.158)$$

Konstanten K beror på maximum av beloppet av tredje-derivatorna över en omgivning av \bar{x} .

Definition 1.14 (Hesse-matrisen) Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Antag att alla dess partiella derivator av ordning upp till och med 2 är kontinuerliga i en omgivning till punkten \bar{x} . Hesse-matrisen för f i \bar{x} är den symmetriska matrisen av andra-derivator:

$$f''(\bar{x}) = D^2 f(\bar{x}) = (f''_{ij}(\bar{x}))_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.159)$$

Den är symmetrisk eftersom $f''_{ij}(\bar{x}) = f''_{ji}(\bar{x})$ enligt sats 1.9. Hesse-matrisen kan beräknas som derivatan av transponatet av $Df(x)$, dvs

$$D^2 f(\bar{x}) = D((Df)^T)(\bar{x}) \quad (1.160)$$

se problem 1.7.

Formeln (1.160) är praktisk då den gör det möjligt att beräkna Hesse-matrisen numeriskt genom upprepad användning av algoritm 1.

Sats 1.10 (Taylors sats) Antag $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning 3 i en omgivning av punkten \bar{x} . Då gäller Taylors formel för alla x i denna omgivning, dvs

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}h^T f''(\bar{x})h + E_2[f, \bar{x}](x), \quad h = x - \bar{x} \quad (1.161)$$

där resttermen uppfyller olikheten $|E_2[f, \bar{x}](x)| \leq K\|h\|^3$ med $K = c_n \max |f'''_{ijk}(\xi)|$ där maximum tas med avseende på i, j, k och med avseende på alla ξ i den nämnda omgivningen.

Polynomet

$$P_2[f, \bar{x}](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T f''(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (1.162)$$

kallas Taylors polynom för f i punkten \bar{x} .

Poängen med Taylors formel (1.161) är att man får en formel (uttryckt i tredje-derivatorna) för resttermen, vilket gör det möjligt att uppskatta hur fort den går mot 0 då $h \rightarrow 0$.

Bevis. Beviset är analogt med beviset av fallet med $n = 2$ ovan. □

Exempel 1.23 (Taylorpolynom) Låt $f(x) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{8}{x_1} - x_2$. Beräkna Taylors polynom av grad 2 för f i punkten $\bar{x} = (1, 1)$. Vi har $f(1, 1) = 8$. Jacobi-matrisen är

$$f'(x) = [x_2^{-1} - 8x_1^{-2} \quad -x_1x_2^{-2} - 1], \quad f'(1, 1) = [-7 \quad -2]$$

Hesse-matrisen är

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 16x_1^{-3} & -x_2^{-2} \\ -x_2^{-2} & 2x_1x_2^{-3} \end{bmatrix}, \quad f''(1, 1) = \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Taylor-polynomet är

$$\begin{aligned} P_2[f, \bar{x}](x) &= f(1, 1) + f'(1, 1)h + \frac{1}{2}h^T f''(1, 1)h \\ &= 8 + [-7 \quad -2] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [h_1 \quad h_2] \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \\ \text{där } h &= \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.7 Gradient och riktningsderivata

I det här avsnittet kommer vi att använda beteckningar från geometriska vektorer. Vi tar en deriverbar funktion av typ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (eller $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$). Vi betrakar den som en skalär funktion av rumskoordinaterna, dvs ett *skalärt fält*. Vi skriver $w = f(x, y, z)$ (eller $z = f(x, y)$). Vi kan även använda Ortsvektorn $\mathbf{r} = (x, y, z)$ och skriva $w = f(\mathbf{r})$.

Gradienten till f är

$$\nabla f(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + f'_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + f'_z(x, y, z)\mathbf{e}_z \quad (1.163)$$

eller på kompakt form

$$\nabla f(x, y, z) = (f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)) \quad (1.164)$$

Observera att ∇f är en vektorvärd funktion av rumskoordinaterna, dvs ett *vektorfält*. Gradienten skrivs ibland $\text{grad}f$.

Definition 1.15 (Nabla-operatorn) Nabla-operatorn är

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z \quad (1.165)$$

Nabla är en deriveringsoperator som verkar på ett deriverbart skalärt fält enligt

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) f(x, y, z) \\ &= (f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z))\end{aligned}\quad (1.166)$$

Exempel 1.24 (Gradient) Låt $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Vi får då

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z), \quad \nabla f(1, 2, 3) = (2, 4, 6) \quad (1.167)$$

Obs att $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2$ och $\nabla f(\mathbf{r}) = 2\mathbf{r}$.

Definition 1.16 (Riktningderivata) Låt $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ vara en enhetsvektor, dvs $|\mathbf{u}| = 1$. Riktningderivatan i riktningen \mathbf{u} av ett skalär fält f i punkten $a = (a_x, a_y, a_z)$ är

$$D_{\mathbf{u}}f(a) = \left. \frac{d}{dt} f(a_x + tu_x, a_y + tu_y, a_z + tu_z) \right|_{t=0} \quad (1.168)$$

Med andra ord: vi deriverar envariabelfunktionen $g(t) = f(a + t\mathbf{u})$ i punkten $t = 0$, dvs $D_{\mathbf{u}}f(a) = g'(0)$.

Funktionen $g(t) = f(a + t\mathbf{u})$ evaluerar fältet f längs den räta linje som går genom punkten a och som har riktningsvektorn \mathbf{u} . Det är viktigt att riktningsvektorn är normerad, $|\mathbf{u}| = 1$, annars får man fel värde på derivatan.

Sats 1.11 (Riktningderivata) Om f är deriverbar i a så gäller

$$D_{\mathbf{u}}f(a) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a) \quad (1.169)$$

Bevis. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(a + t\mathbf{u}) &= f'_x(a + t\mathbf{u})u_x + f'_y(a + t\mathbf{u})u_y + f'_z(a + t\mathbf{u})u_z \\ &= \mathbf{u} \cdot \nabla f(a + t\mathbf{u})\end{aligned}\quad (1.170)$$

Med $t = 0$ får vi $D_{\mathbf{u}}f(a) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a)$. □

Vi noterar att $\mathbf{u} \cdot \nabla f(a)$ är den skalära projektionen av gradientvektorn $\nabla f(a)$ på riktningsvektorn \mathbf{u} . Vi har alltså

$$D_{\mathbf{u}}f(a) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a) = |\mathbf{u}| |\nabla f(a)| \cos(\theta) = |\nabla f(a)| \cos(\theta) \quad (1.171)$$

där θ är vinkeln mellan vektorerna. Vi ser att riktningsderivatan i riktningen \mathbf{u} blir maximal då $\cos(\theta) = 1$, dvs då \mathbf{u} är parallell med $\nabla f(a)$, och minimal då $\cos(\theta) = -1$, dvs då \mathbf{u} är antiparallell med $\nabla f(a)$. Vi drar slutsatsen att $\nabla f(a)$ pekar i den riktning dit f ökar snabbast och $-\nabla f(a)$ pekar i den riktning dit f minskar snabbast. Den största derivatan fås i riktningen $\mathbf{u} = \nabla f(a)/|\nabla f(a)|$ och den är $D_{\mathbf{u}}f(a) = |\nabla f(a)|$. Den minsta derivatan fås i riktningen $\mathbf{u} = -\nabla f(a)/|\nabla f(a)|$ och den är $D_{\mathbf{u}}f(a) = -|\nabla f(a)|$.

Exempel 1.25 (Rikttningsderivata) Låt $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. I exempel 1.24 räknade vi ut att $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Vi vill räkna ut derivatan i riktningen $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$. Vi måste normera riktningsvektorn, $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| = (4, 3, 0)/5$. Då får vi

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 2, 3) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(1, 2, 3) = \frac{1}{5}(4, 3, 0) \cdot (2, 4, 6) = 4 \quad (1.172)$$

I vilken riktning ökar funktionen snabbast i punkten $(1, 2, 3)$? Jo, i riktningen $\mathbf{w} = \nabla f(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$. Detta är $2\mathbf{r}$ där $\mathbf{r} = (1, 2, 3)$ är Ortsvektorn för punkten $a = (1, 2, 3)$, dvs rakt ut från origo. Detta är väntat eftersom funktionen är rotationssymmetrisk. Den största derivatan i punkten $(1, 2, 3)$ är $|\nabla f(1, 2, 3)| = |(2, 4, 6)| = 56$, den fås i riktningen rak utåt. Den minsta är -56 , i riktningen rakt inåt.

En slutlig kommentar: Med matrisbeteckningar är $\mathbf{u} \cdot \nabla f(a)$ inget annat än $f'(a)(\mathbf{u})$, dvs derivatan verkande på vektorn \mathbf{u} .

1.8 Övningar

1.1 Funktioner av flera variabler

Övning 1.1 Rita graferna till funktionerna $f(x, y)$.

(a) $1 - x^2 - y^2$ (b) $\sqrt{1 - y}$ (c) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Övning 1.2 Rita nivåkurvorna $f(x, y) = C$ för $C = -2, -1, 0, 1, 2$ för funktionerna.

(a) $x + y$ (b) $y(1 + x^2)$ (c) $1 - x^2 - y^2$ (d) $\sqrt{1 - y}$

Övning 1.3 Rita delmängderna av planet \mathbb{R}^2 . Finn om möjligt en inre punkt, en yttre punkt och en randpunkt. Avgör om mängderna är öppna, slutna eller ingetdera och om de är begränsade eller ej.

(a) $\{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y > 1\}$ (b) $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$

(c) $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 4\}$ (d) $\{(x, y) : |x| + |y| > 0\}$

Övning 1.4 Undersök om funktionerna har gränsvärde då $x \rightarrow 0$.

(a) $x_1 x_2$ (b) $\frac{x_1^2 - 3x_2^2}{2x_1^2 + x_2^2}$ (c) $\frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$ (d) $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2}$

Övning 1.5 Undersök om följande gränsvärden existerar eller ej:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2}$

Övning 1.6 Bestäm definitionsmängden och värdemängden till $f(x) = \frac{x_1 x_2 + 1}{x_1 - x_2}$.

1.2 Linjärisering och derivata

Övning 1.7 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) $f'_x(3, -4)$ (b) $f'_y(3, -4)$ (c) $f''_{yy}(3, -4)$

Övning 1.8 $f(s, t) = (s^2 + t^2)/\sqrt{s + t}$. Beräkna $f'_s(5, -1)$.

Övning 1.9 $u(x, y, z) = z \arcsin(y/x)$. Beräkna $u''_{xz}(5, 3, 5)$.

Övning 1.10 Beräkna linjäriseringen av f i \bar{x} .

(a) $f(x) = e^{-x_1} \sin(x_2)$, $\bar{x} = (0, 0)$

(b) $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $\bar{x} = (1, 1, 1)$

(c) $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1x_2 \\ -x_2 + x_1x_2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = (1, 1)$

Övning 1.11 Beräkna linjäriseringen av f i \bar{x} .

(a) $f(x) = \begin{bmatrix} \sin(x_1) + \cos(x_2) \\ \cos(x_1) + \sin(x_2) \end{bmatrix}$, $\bar{x} = 0$

(b) Beräkna Jacobi-matrisen.

(c) $f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + x_1 \\ 1 + x_1e^{x_2} \end{bmatrix}$, $\bar{x} = (1, 1)$

Övning 1.12 Beräkna linjäriseringen av f i \bar{t} .

(a) $f(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$, $\bar{t} = \pi/2$ (b) $f(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 + t^2 \end{bmatrix}$, $\bar{t} = 0$

Övning 1.13 Använd linjärisering för att bestämma en ekvation för tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$ i punkten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

(a) $x^2 + 2y^2$, $(1, 1, 3)$

(b) $\frac{1}{x^2 + y^2}$, $(1, 1, \frac{1}{2})$

1.3 Newtons metod

Övning 1.14 (a) Skriv systemet

$$u_2(1 - u_1^2) = 0$$

$$2 - u_1u_2 = 0$$

på formen $f(u) = 0$. Finn alla lösningar med handräkningar.

(b) Beräkna Jacobi-matrisen.

(c) Gör ett steg av Newtons metod (handräkning) med startvektor $u^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Övning 1.15 (a) Skriv systemet

$$\begin{aligned}u_1(1 - u_2) &= 0, \\u_2(1 - u_1) &= 0\end{aligned}$$

på formen $f(u) = 0$. Finn alla lösningar med handräkningar.

(b) Beräkna Jacobi-matrisen.

(c) Gör ett steg av Newtons metod (handräkning) med startvektor $u^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1.4 Kedjeregeln

Övning 1.16 Beräkna $\frac{df}{dt}$.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ med $x = t + 1/t, y = t - 1/t$

(b) $f(x, y) = e^{2x-y}$ med $x = \ln(t), y = t^2$

Övning 1.17 Beräkna $\partial f/\partial u$ och $\partial f/\partial v$.

(a) $f(x, y) = x^2y^3$ med $x = u + v, y = u - v$

(b) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ med $x = 2u + v, y = 3u - 2v$

Övning 1.18 Använd sats 1.7 för att bestämma en Lipschitz-konstant för f på A .

(a) $f(x) = \sin(x_1x_2), A = [0, 1] \times [0, 1]$

(b) $f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2x_2^5 \\ x_2^3 \end{bmatrix}, A = B_1(0)$

1.5 Derivator av högre ordning

Övning 1.19 Låt $f(x, y, z) = e^{x^2y^2} \sin(z^2)$. Beräkna derivatorna.

(a) $f''_{13}(x, y, z)$ (b) $f''_{32}(x, y, z)$ (c) $f'''_{113}(x, y, z)$ (d) $f'''_{131}(x, y, z)$

1.6 Taylors formel

Övning 1.20 $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2$. Bestäm Taylors polynom av grad 2 i punkten $\bar{x} = (1, 1)$.

Övning 1.21 $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2$. Bestäm Taylors polynom av grad 2 i punkten $\bar{x} = (1, 1, 1)$.

Övning 1.22 Bestäm Taylors polynom av grad 2 för funktionen $f(x, y) = \ln(2x + y^2) - 2y + 5$ i punkten $(0, 1)$.

1.7 Gradient och riktningsderivata

Övning 1.23 Beräkna gradienten och riktningsderivatan av f i punkten a i riktningen \mathbf{v} .

(a) $f(x, y) = \sin(x/y)$, $a = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1)$

(b) $f(x, y, z) = 2 + z + xe^y$, $a = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 2)$

(c) $f(x, y, z) = 2 + z + xe^y$, $a = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$

(d) $f(x, y) = x^2 - 6y^2$, $a = (7, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 1)$

Övning 1.24 Beräkna maximala och minimala riktningsderivatan av funktionen xyz i punkten $(1, 2, 3)$.

1.9 Problem

1.1 Funktioner av flera variabler

1.2 Linjärisering och derivata

Problem 1.1 Bestäm Jacobi-matrisen för den linjära funktionen $f(x) = Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Problem 1.2 Antag att $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar. Visa att funktionen $u(x, y) = xF(y/x)$ satisfierar den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad (1.173)$$

1.3 Newtons metod

1.4 Kedjeregeln

Problem 1.3 Inför nya variabler $u = x$, $v = 2x - y$ i differentialekvationen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 2 \frac{\partial F}{\partial y} = x + y$$

Bestäm sedan den lösning till differentialekvationen som uppfyller randvillkoret $F(x, 0) = x^2$.

Problem 1.4 Lös vågekvationen $w_{tt} = c^2 w_{xx}$ genom att sätta $u = x - ct$, $v = x + ct$.

Problem 1.5 Antag att $z = f(x, y)$ och inför polära koordinater r, θ genom

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

Visa att Laplaces ekvation $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ blir

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$$

1.5 Derivator av högre ordning

Problem 1.6 Visa att u satisfierar Laplaces differentialekvation $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$.

(a) $u = e^{3x+4y} \cos(5z)$ (b) $u = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ (c) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

1.6 Taylors formel

Problem 1.7 Visa att Hesse-matrisen ges av $D^2 f(\bar{x}) = D((Df)^T)(\bar{x})$.

Problem 1.8 Bestäm Taylors polynom av grad 2 i origo av den funktion $z(x, y)$ som definieras implicit av ekvationen $xy + xz + \sin(z) = 0$ med tilläggsvillkoret $z(0, 0) = 0$.

Problem 1.9 Lös tredjegrads ekvationen $z^3 + (1 + xy)z - x - y - xy = 0$ approximativt för små $|x|, |y|$ genom Taylorutveckling av $z(x, y)$. Tag med termer av grad högst 2.

1.7 Gradient och riktningsderivata

Problem 1.10 Låt $\mathbf{r} = (x, y)$ vara ortsvektorn i planet och $f(\mathbf{r}) = \ln(|\mathbf{r}|)$. Visa att

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|}$$

Problem 1.11 Låt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ vara ortsvektorn i rummet och $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^{-1}$. Visa att

$$\nabla f(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2}$$

Problem 1.12 Beräkna vinkeln mellan gradienterna till $\ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ och $\arctan(y/x)$.

Problem 1.13 Visa att riktningsderivatorna av $f(x, y, z)$ i riktningarna $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ och \mathbf{e}_z är de partiella derivatorna f'_x, f'_y respektive f'_z .

2. Optimering

2.1	Extremvärden	51
2.2	Kritiska punkter	54
2.3	Extremvärden i kompakta mängder	58
2.4	Lagranges multiplikatormetod	59
2.5	Övningar	64
2.6	Problem	65

Mycket ingenjörarbete går ut på att optimera, dvs att minimera eller maximera en funktion. Det kan vara att maximera utbytet av en process, minimera materialåtgången, minimera en kostnad och så vidare. Vi vill alltså beräkna $\max f(x)$ eller $\min f(x)$. Det handlar om att sortera värdena, vilket är en kostsam beräkning. Ofta kan man ta en genväg med hjälp av flervariabelanalys: i en maximipunkt eller minimipunkt gäller

$$f'(x) = 0 \quad (2.1)$$

Detta är ett system av icke-linjära ekvationer som kan lösas med Newtons metod. Detta är inledningen till ett viktigt matematiskt område: optimeringslära.

2.1 Extremvärden

Definition 2.1 (Extremvärde) Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Funktionen har *lokalt maximum* i \bar{x} om det finns en omgivning $B_\delta(\bar{x})$ så att

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}) \cap \mathcal{D}(f) \quad (2.2)$$

Funktionen har *globalt maximum* i \bar{x} om

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathcal{D}(f) \quad (2.3)$$

Genom att vända olikheten, dvs $f(x) \geq f(\bar{x})$, definierar vi *lokalt minimum* och *globalt minimum*. Värdet $f(\bar{x})$, dvs maximum eller minimum, kallas *extremvärde*. Punkten \bar{x} där maximum eller minimum inträffar, kallas *extrempunkt*.

Ofta söker vi globalt maximum eller minimum över en delmängd A till $\mathcal{D}(f)$, dvs $\max_{x \in A} f(x)$ eller $\min_{x \in A} f(x)$ med $A \subseteq \mathcal{D}(f)$. Vi skriver också $\max_A f$ och $\min_A f$. Det betyder att vi betraktar funktionen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ istället. Att $\max_{x \in A} f(x)$ existerar betyder alltså att det finns minst en punkt $\bar{x} \in A$ så att $f(\bar{x}) = \max_{x \in A} f(x)$. Vi erinrar oss definitionen av inre punkt och randpunkt från definition 1.2.

Sats 2.1 (Nödvändiga villkor för extremvärde) Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $A \subseteq \mathcal{D}(f)$.

Om $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ har extremvärde i \bar{x} , så är \bar{x} en av följande slags punkter:

- (a) *kritisk punkt* till f , dvs en inre punkt till A där $f'(\bar{x}) = 0$;
- (b) *singulär punkt* till f , dvs en inre punkt till A där $f'(\bar{x})$ ej existerar;
- (c) *randpunkt* till A .

Kritisk punkt kallas ibland *stationär punkt*.

Bevis. Antag att \bar{x} är en punkt som inte är av typen (a), (b) eller (c). Alltså är \bar{x} en inre punkt med $f'(x) \neq 0$. Vi måste visa att \bar{x} inte är extrempunkt.

Antag motsatsen, dvs att \bar{x} är extrempunkt. Bilda envariabelfunktionen $g(t) = f(\bar{x} + th)$ med $t \in \mathbb{R}$ och $h \in \mathbb{R}^n$ med t så litet att $\bar{x} + th \in A$. Då har g en extrempunkt i $t = 0$ för alla riktningar h . Från envariabelanalys vet vi att då måste derivatan $g'(0) = f'(\bar{x})h$ vara 0 för alla h . Det är omöjligt eftersom $f'(x) \neq 0$. Tag till exempel $h = f'(\bar{x})^T$ så att $g'(0) = f'(\bar{x})f'(\bar{x})^T = \|f'(\bar{x})\|^2 \neq 0$. Alltså är \bar{x} en extrempunkt. \square

Satsen handlar om bland vilka slags punkter vi ska söka extrempunkter. Vi tittar på kritiska punkter, singulära punkter och randpunkter. Bland dessa kan vi finna lokala maxima och lokala minima. Sedan jämför vi värdena i dessa punkter för att finna eventuella globala maxima och minima.

Sats 2.1 garanterar inte att det finns några extrempunkter. Men det gör följande sats. Vi erinrar oss definitionerna av begreppen sluten mängd och begränsad mängd från definition 1.3 och definition 1.4. En mängd som är sluten och begränsad kallas *kompakt*.

Sats 2.2 (Extremvärdessatsen) Om f är kontinuerlig på en sluten och begränsad (kompakt) mängd A , så antar f både ett största värde och ett minsta värde i A . Med andra ord: det finns punkter i A där f har globalt maximum och globalt minimum.

Vi utelämnar beviset. Denna sats är flervariabelvarianten av extremvärdessatsen i envariabelanalysen, sats 4.9 i del I. Den ger alltså tillräckliga villkor för globala maxima och minima. Vi illustrerar dessa satser med några exempel.

Exempel 2.1 (Extremvärde) Låt $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Då har vi $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Vi har inga randpunkter och inga singulära punkter i $\mathcal{D}(f)$. Kritiska punkter

ges av

$$f'(x) = [2x_1 \quad 2x_2] = [0 \quad 0] \quad (2.4)$$

dvs ekvationssystemet

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

med unik lösning $x = (0, 0)$. Vi har en kritisk punkt i origo med värdet $f(0, 0) = 0$. Det är globalt minimum eftersom alla värden är ≥ 0 . Det finns inget globalt maximum, ty funktionen är obegränsad (definition 1.5): $|f(x)| \rightarrow \infty$ då $\|x\| \rightarrow \infty$. Vi noterar att $\mathcal{D}(f)$ är sluten men obegränsad (ej kompakt), vilket möjliggör att funktionen inte har något globalt maximum i det här exemplet.

Exempel 2.2 (Extremvärde) Vi tar $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ igen men söker nu extrempunkter i mängden $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - \hat{x}\| \leq 2\}$, dvs en sluten disk med radie 2 och centrum i $\hat{x} = (1, 0)$. Eftersom $f(x)$ är lika med avståndet från x till origo i kvadrat, så har vi störst värde i den punkt i A som är längst bort från origo, dvs $(3, 0)$. Vi har alltså globalt maximum i $(3, 0)$ (randpunkt) med värdet $f(3, 0) = 9$. Globalt minimum är $f(0, 0) = 0$ som förut (kritisk punkt). Här är A sluten och begränsad och vi har både maximum och minimum:

$$\max_{x \in A} f(x) = f(3, 0) = 9, \quad \min_{x \in A} f(x) = f(0, 0) = 0 \quad (2.6)$$

Exempel 2.3 (Extremvärde) Vi tar $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, nu med $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - \hat{x}\| < 2\}$, dvs en öppen disk. Vi har globalt minimum i $(0, 0)$ men inget globalt maximum för $(3, 0) \notin A$. Här är A begränsad men ej sluten (ej kompakt). Värdet 9 är inte maximum utan den minsta övre begränsningen (supremum) till f över A :

$$\sup_{x \in A} f(x) = 9, \quad \min_{x \in A} f(x) = f(0, 0) = 0 \quad (2.7)$$

Exempel 2.4 (Extremvärde) Vi tar $f(x) = \|x\|^{-2} = 1/(x_1^2 + x_2^2)$ med $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \geq 1\}$. Mängden A är sluten och obegränsad. Vi har globalt maximum lika med 1 på randen $\partial A = \{x : \|x\| = 1\}$, men inget globalt minimum för $f(x) \geq 0$ och $f(x) \rightarrow 0$ då $\|x\| \rightarrow \infty$. Värdet 0 är inte minimum utan den största undre begränsningen (infimum) till f över A :

$$\max_{x \in A} f(x) = 1, \quad \inf_{x \in A} f(x) = 0 \quad (2.8)$$

Exempel 2.5 (Extremvärde) Låt $f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ med $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$ och $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$. Vi har

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{bmatrix} = \frac{x}{\|x\|}, \quad x \neq 0 \quad (2.9)$$

Vi har ingen kritisk punkt men en singular punkt $x = (0, 0)$ med $f(0, 0) = 0$. För övrigt är $f(x) \geq 0$, så att vi har globalt minimum i origo. Maximum inträffar på randen med $f(x) = 1$ då $\|x\| = 1$. Alltså:

$$\max_A f = 1, \quad \min_A f = 0 \quad (2.10)$$

Exempel 2.6 (Extremvärde) Låt $f(x) = x_2^2 - x_1^2$ med $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Som i exempel 2.1 har vi inga randpunkter, inga singulara punkter och en kritisk punkt $(0, 0)$ med värdet $f(0, 0) = 0$. Men funktionen tar både positiva och negativa värden nära origo:

$$f(x_1, 0) = -x_1^2 < f(0, 0) = 0 \quad \text{om } x_1 \neq 0 \quad (2.11)$$

$$f(0, x_2) = x_2^2 > f(0, 0) = 0 \quad \text{om } x_2 \neq 0 \quad (2.12)$$

Vi har alltså varken lokalt maximum eller lokalt minimum i origo. En sådan punkt kallas *sadelpunkt*. Denna funktion har varken globalt maximum eller globalt minimum för den går mot både $+\infty$ och $-\infty$ då $\|x\| \rightarrow \infty$ i olika riktningar. Definitionsmängden är både öppen och sluten men obegränsad.

Definition 2.2 (Sadelpunkt) En kritisk punkt som är varken lokal maximipunkt eller lokal minimipunkt kallas sadelpunkt.

Hur kan vi avgöra om en kritiskt punkt är lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera (sadel-punkt)? Nästa avsnitt ger ett svar på denna fråga.

2.2 Kritiska punkter

Antag att $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har en kritisk punkt \bar{x} , dvs en inre punkt till $\mathcal{D}(f)$ sådan att $f'(\bar{x}) = 0$. Hur kan vi avgöra om det är en lokal maximipunkt, lokal minimipunkt eller sadelpunkt? För envariabelfunktion erinrar vi oss att vi kan titta på tecknet av andraderivatans: f har lokalt minimum i \bar{x} om $f''(\bar{x}) > 0$ och lokalt maximum i \bar{x} om $f''(\bar{x}) < 0$. I första fallet är funktionen strikt konvex i en omgivning av \bar{x} ; i det andra fallet strikt konkav.

För flervariabelfunktion representeras andraderivatan av den symmetriska Hesse-matrisen, definition 1.14,

$$f''(x) = \begin{bmatrix} f''_{11}(x) & \cdots & f''_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(x) & \cdots & f''_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

och det blir mera komplicerat att undersöka tecknet och eventuell konvexitet/konkavitet.

Vi erinrar oss från linjär algebra att en funktion $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kallas *kvadratisk form* om den har formen $g(x) = x^T Ax$ med en symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. En symmetrisk matris A (och motsvarande kvadratiske form $x^T Ax$) kallas

- *positivt definit* om $x^T Ax > 0$ för alla $x \neq 0$;
- *negativt definit* om $x^T Ax < 0$ för alla $x \neq 0$;
- *indefinit* om $x^T Ax > 0$ för något x och $x^T Ax < 0$ för något x .

I linjär algebra lärde vi också att en symmetrisk matris A är

- positivt definit om och endast om alla dess egenvärden är positiva;
- negativt definit om och endast om alla dess egenvärden är negativa;
- indefinit om och endast om den har både positiva och negativa egenvärden.

Obs att det handlar om strikt tecken här: $x^T Ax > 0$ för alla $x \neq 0$ om och endast om alla $\lambda_k > 0$. Om något egenvärde är 0, dvs alla $\lambda_k \geq 0$, så är A positivt semidefinit, $x^T Ax \geq 0$ för alla x . Motsvarande för negativt semidefinit matris.

Sats 2.3 (Tillräckliga villkor för lokala extrempunkter) Antag att $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har en kritisk punkt $\bar{x} \in \mathcal{D}(f)$. Antag att alla partiella derivator till f av ordning upp till och med två är kontinuerliga i en omgivning till \bar{x} så att även Hesse-matrisen är kontinuerlig. Då gäller följande:

- om $f''(\bar{x})$ är positivt definit så har f lokalt minimum i \bar{x} ;
- om $f''(\bar{x})$ är negativt definit så har f lokalt maximum i \bar{x} ;
- om $f''(\bar{x})$ är indefinit så är \bar{x} en sadelpunkt till f ;
- om $f''(\bar{x})$ är varken positivt definit, negativt definit eller indefinit så får vi ingen information om \bar{x} .

Bevis. Vi härleder Taylors formel av ordning 1, jämför avsnitt 1.6. Tag x i den omgivningen av \bar{x} där derivatorna är kontinuerliga. Vi bildar envariabelfunktionen

$$F(t) = f(\bar{x} + th), \quad t \in [0, 1] \quad (2.14)$$

med $h = x - \bar{x}$. Då har vi $F(0) = f(\bar{x})$ och $F(1) = f(\bar{x} + h) = f(x)$. Vi skriver ned Taylors formel av ordning 1 för F i punkten 0 med $t = 1$ (se (1.145)):

$$F(1) = F(0) + F'(0)1 + \frac{1}{2}F''(s)1^2 \quad (2.15)$$

med $s \in [0, 1]$. Detta är detsamma som

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}h^T f''(\bar{x} + sh)h \quad (2.16)$$

där $\bar{x} + sh$ är en okänd punkt mellan \bar{x} och x . Nu är $f'(\bar{x}) = 0$ (kritisk punkt) så att

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^T f''(\bar{x} + sh)h \quad (2.17)$$

Antag nu att $f''(\bar{x})$ är positivt definit, dvs $h^T f''(\bar{x})h > 0$ för alla $h \in \mathbb{R}^n$. Då är även $h^T f''(\bar{x} + sh)h > 0$ för alla h med $\|h\|$ tillräckligt liten, eftersom Hesse-matrisen är kontinuerlig i en omgivning av \bar{x} . Då har vi

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^T f''(\bar{x} + sh)h > f(\bar{x}) \quad (2.18)$$

för alla $x = \bar{x} + h \neq \bar{x}$ i en omgivning av \bar{x} . Alltså: om $f''(\bar{x})$ är positivt definit, så har vi lokalt minimum i \bar{x} .

Detta bevisar det första påståendet. De övriga bevisas analogt. Till exempel: om $f''(\bar{x})$ är indefinit så får vi i (2.17) att $f(\bar{x} + h) > f(\bar{x})$ för någon riktning h och $f(\bar{x} + h) < f(\bar{x})$ för någon annan riktning. Då har vi varken lokalt minimum eller maximum i \bar{x} , dvs det är en sadelpunkt. \square

Obs att vi behöver strikt tecken här. Till exempel i fall (a) har vi $h^T f''(\bar{x})h > 0$ för alla $h \neq 0$. Om vi bara skulle ha att $h^T f''(\bar{x})h \geq 0$ för alla h (positivt semidefinit), så skulle $h^T f''(\bar{x} + sh)h$ kunna vara negativ för något litet h och vi kan inte dra någon slutsats. Därför ger fall (d) ingen information. I detta fall måste man vara innovativ och hitta på speciella metoder för speciella fall.

Exempel 2.7 (Metod för undersökning av kritiska punkter) För att undersöka en funktion med avseende på kritiska punkter kan man följa följande steg. Detta är en lämplig datorövning.

Steg 1. Plotta funktionen (om det går) för att få en uppfattning om var de kritiska punkterna är. Detta kan användas för att hitta bra startpunkter för Newtons metod i steg 2.

Steg 2. Kritiska punkter ges av ekvationssystemet

$$f'(x)^T = 0 \quad (2.19)$$

Detta löses med Newtons metod.

Steg 3. För varje kritisk punkt \bar{x} beräknas Hesse-matrisen $f''(\bar{x})$ och dess egenvärden.

- Om alla egenvärden $\lambda_k > 0$, så har vi lokalt minimum.
- Om alla egenvärden $\lambda_k < 0$, så har vi lokalt maximum.
- Om något egenvärde $\lambda_k > 0$ och något egenvärde $\lambda_k < 0$, så har vi sadelpunkt.
- Annars, ingen slutsats.

Exempel 2.8 (Kritiska punkter) Vi studerar funktionen $f(x) = x_1^2 x_2^3$. Kritiska punkter ges av ekvationssystemet

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2^3 \\ 3x_1^2 x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

med lösningarna $x_1 = 0$ eller $x_2 = 0$, dvs kritiska punkter på hela x_1 -axeln och hela x_2 -axeln.

Hesse-matrisen är

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 2x_2^3 & 6x_1 x_2^2 \\ 6x_1 x_2^2 & 6x_1^2 x_2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Vi beräknar den i några av de kritiska punkterna. Med $\bar{x} = (0, 1)$ får vi $f''(0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Detta är fall (d) i sats 2.3, dvs ingen information. Vad är det då? Nära $\bar{x} = (0, 1)$ har vi $f(x) = f(\bar{x} + h) = h_1^2(1 + h_2)^3 \geq 0 = f(0, 1)$ för alla små h . Alltså: lokalt minimum.

I punkten $\bar{x} = (0, 0)$ har vi $f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Detta är också fall (d). På linjen $x_1 = t$, $x_2 = t$ har vi

$$f(t, t) = t^5 \begin{cases} > 0 = f(0, 0), & t > 0 \\ < 0 = f(0, 0), & t < 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Vi ser att funktionen ökar i riktningen $h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och minskar i riktningen $h = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Varken lokalt maximum eller minimum, dvs sadelpunkt.

Exempel 2.9 (Kritiska punkter) Vi studerar $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2x$. Kritiska punkter ges av

$$\begin{cases} 2xy - 2 = 0 \\ x^2 + 2yz = 0 \\ y^2 + 2z = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Tredje ekvationen ger $z = -y^2/2$. Insättning i andra ekvationen ger $x^2 - y^3 = 0$, dvs $y = x^{2/3}$. Insättning första ekvationen ger $x^{5/3} = 1$, dvs $x = 1$. Sedan $y = 1$, $z = -1/2$. Vi har en kritisk punkt $(1, 1, -1/2)$.

Hesse-matrisen är

$$f''(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2y & 2 & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$f''(1, 1, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Egenvärdena ges av

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} - 4(2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 10) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

dvs $2 - \lambda = 0$ eller $\lambda^2 - \lambda - 10 = 0$. Egenvärdena är $2, \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 10}$. Ett egenvärde är negativt, två är positiva. Alltså: sadelpunkt.

2.3 Extremvärden i kompakta mängder

Sats 2.2 garanterar att en kontinuerlig funktion har globala maxima och minima i en sluten och begränsad mängd.

Exempel 2.10 (Metod för beräkning av max och min i kompakt mängd) Antag att $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i den slutna och begränsade mängden A . För att bestämma $\max_{x \in A} f(x)$ och $\min_{x \in A} f(x)$ kan man följa följande steg.

Steg 1. Bestäm alla kritiska punkter och singulära punkter i det inre av A .

Steg 2. Bestäm alla extrempunkter på randen av A .

Steg 3. Jämför värdena av f i dessa punkter.

Exempel 2.11 (Beräkna max och min) Bestäm maximum och minimum för $f(x, y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ i den slutna triangeln T som begränsas av x -axeln, y -axeln och linjen $x + y = 4$.
Steg 1. Vi har inga singulära punkter. Kritiska punkter ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2xye^{-(x+y)} + x^2 ye^{-(x+y)}(-1) = 0 \\ x^2 e^{-(x+y)} + x^2 ye^{-(x+y)}(-1) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{cases} xy(2-x) = 0 \\ x^2(1-y) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Första ekvationen ger $x = 0$ eller $y = 0$ eller $x = 2$. Den andra ekvationen ger $x = 0$ eller $y = 1$. Om $x = 0$ kan y vara godtycklig. Om $x = 2$ måste $y = 1$. Vi ser att vi har kritiska punkter $(2, 1)$ och $(0, y)$ (dvs hela y -axeln). Endast $(2, 1)$ är inre punkt till T . Värdet är $f(2, 1) = 4e^{-3}$.

Steg 2. På randen $x = 0$: $f(0, y) = 0$. På randen $y = 0$: $f(x, 0) = 0$. På randen $x + y = 4$: $f(x, 4 - x) = x^2(4 - x)e^{-4}$. Vi bildar envariabelfunktionen $g(x) = x^2(4 - x)e^{-4} = (4x^2 - x^3)e^{-4}$ och söker dess extrempunkter i det aktuella intervallet $[0, 4]$. Kritiska punkter ges av

$$g'(x) = (8x - 3x^2)e^{-4} = x(8 - 3x)e^{-4} = 0 \quad (2.29)$$

med lösningarna $x = 0$ och $x = 8/3$. Endast $8/3$ är inre punkt i $[0, 4]$. Motsvarande y är $y = 4 - x = 4/3$ och funktionens värde är $g(8/3) = f(8/3, 4/3) = (256/27)e^{-4}$. Vi kollar även ändpunkterna: $g(0) = f(0, 4) = 0$, $g(4) = f(4, 0) = 0$.

Steg 3. Vi jämför funktionens värde i de olika punkterna:

$$\begin{aligned} f(2, 1) &= 4e^{-3} \approx 0.199 \\ f(8/3, 4/3) &= \frac{256}{27}e^{-4} \approx 0.174 \\ f(0, y) &= f(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Vi drar slutsatsen att

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in T} f(x, y) &= 4e^{-3}, \quad \text{antas i } (2, 1) \\ \min_{(x,y) \in T} f(x, y) &= 0, \quad \text{antas på randen } x = 0 \text{ och } y = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Vi inser nu att detta är ingen praktisk metod: den fungerar bara i mycket enkla specialfall eftersom man måste söka extrempunkter på randen. I nästa avsnitt presenterar vi en mer generell metod.

2.4 Lagranges multiplikatormetod

Vi har löst *fria optimeringsproblem*, dvs bestämt $\max f(x)$ eller $\min f(x)$ över $x \in \mathbb{R}^n$. Här är variabeln x fri, det finns inga restriktioner. Vi har även optimerat över kompakt mängd A , vilket kräver en speciell undersökning av randen ∂A enligt metoden i exempel 2.10. Villkoret $f'(\bar{x}) = 0$ är lätt att arbeta med men är tillämpligt endast i inre punkt $\bar{x} \in A$. Därför är fria optimeringsproblem enklare eftersom kritiska punkter är de enda möjliga extrempunkterna (förutsatt att f är deriverbar överallt). Lagranges multiplikatormetod omvandlar ett optimeringsproblem med restriktioner till

ett fritt problem genom att lägga till fler variabler.

Optimeringsproblem är oftast inte fria: det finns restriktioner och samband mellan variablerna. Till exempel:

$$\text{minimera } f(x, y) \text{ under bivillkoret } g(x, y) = c \quad (2.32)$$

Det betyder att minimera på nivåkurvan $g(x, y) = c$. Eller:

$$\text{minimera } f(x, y) \text{ under bivillkoret } g(x, y) \leq c \quad (2.33)$$

Det betyder att minimera på området innanför nivåkurvan $g(x, y) = c$. Vi skiljer mellan *liktetsbivillkor* $g(x, y) = c$ och *olikhetsbivillkor* $g(x, y) \leq c$. Funktionen f kallas *målfunktion*.

I tre variabler kan man ha upp till två bivillkor:

$$\text{minimera } f(x, y, z) \text{ under bivillkoren } g(x, y, z) = c \text{ och } h(x, y, z) = d \quad (2.34)$$

Varje bivillkor är här typiskt en nivåyta och med två villkor får vi typiskt en kurva. Med tre bivillkor blir det i bästa fall en punkt, vilket vore meningslöst. Vi kan alltid ta $c = d = 0$ genom att flytta termer till vänsterledet.

Mer allmänt, med $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $m < n$, kan vi ställa upp optimeringsproblemet

$$\text{minimera } f(x) \text{ under bivillkoret } g(x) = 0 \quad (2.35)$$

Vi har alltså n variabler och m bivillkor. Vi kommer inte att behandla olikhetsbivillkor, men de kan också lösas med Lagranges multiplikator metod. Att lösa optimeringsproblemet (2.35) innebär att finna $\bar{x} \in A$ som uppfyller $f(\bar{x}) = \min_{x \in A} f(x)$ där $A = \{x \in \mathbb{R}^n : g(\bar{x}) = 0\}$.

Obs: att minimera f är ekvivalent med att maximera $-f$. Därför räcker det (matematiskt) att betrakta minimeringsproblem. Vi kan också säga *optimera* om det handlar om att både maximera och minimera en funktion.

För sådana problem används *Lagranges multiplikator metod*. Vi presenterar den först i ett enkelt exempel.

Exempel 2.12 (Lagranges multiplikator metod) Vi söker maximum för xy på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Vi formulerar som ett optimeringsproblem:

$$\text{maximera } f(x, y) \text{ under bivillkoret } g(x, y) = 0 \quad (2.36)$$

med $f(x, y) = xy$ och $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Bivillkoret betyder alltså en cirkel medan nivåkurvorna $f(x, y) = c$ betyder hyperbler, $xy = c$ eller $y = c/x$. Vi söker den nivåkurva med maximalt värde på c som skär cirkeln. Om c är stort skär hyperblerna inte cirkeln, men om vi minskar c kommer en av hyperblerna tangera cirkeln i en punkt (x, y) . Av symmetriskäl har vi $x = y$, vilket ger $x^2 + x^2 = 1$, dvs $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ och sedan $c = f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$. Maximum är alltså $\frac{1}{2}$ och antas i punkterna $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ och $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Vi ser att de två kurvorna $f(x, y) = \frac{1}{2}$ och $g(x, y) = 0$ tangerar varandra i maximipunkterna. Tangering innebär att normalvektorerna är kolinjära (parallella eller antiparallella) i

punkten. En normalvektor i punkten (x, y) för nivåkurvan $f(x, y) = \frac{1}{2}$ är gradientvektorn $\nabla f(x, y)$ och för $g(x, y) = 0$ gradientvektorn $\nabla g(x, y)$. De är kolinjära om det finns en skalär λ så att

$$\nabla f(x, y) = -\lambda \nabla g(x, y) \quad (2.37)$$

(Minustecknet är valt för att det ska bli snyggt på slutet.) Här är $\nabla f(x, y) = (y, x)$ och $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$. Vi skriver dessa med matrisbeteckningar:

$$f'(x, y)^T = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \quad g'(x, y)^T = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Tangeringspunkter ges av dessa tre ekvationer i tre obekanta x, y, λ :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (2.39)$$

dvs

$$\begin{cases} y = -2\lambda x \\ x = -2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (2.40)$$

Vi ser genast att $x \neq 0, y \neq 0, \lambda \neq 0$. Sedan eliminerar vi λ ur de två första ekvationerna: $-2\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$, vilket ger $x^2 = y^2$. Detta sätts in i tredje ekvationen: $2x^2 = 1$, dvs $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sedan $y = \pm x$. Vi har fyra tangeringspunkter: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Insättning i $f(x, y)$ ger att maximum är $\frac{1}{2}$ och minimum är $-\frac{1}{2}$. Obs att λ blir $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i de respektive punkterna.

Sats 2.4 (Lagranges multiplikator metod med ett bivillkor) Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbara. Antag att \bar{x} är en extrempunkt till f under bivillkoret $g(x) = 0$. Antag också att $g'(\bar{x}) \neq 0$. Då finns ett tal $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ sådant att $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ är kritisk punkt till *Lagrange-funktionen*

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) \quad (2.41)$$

Bevis. Kritisk punkt till L ges av $L'(x, \lambda)^T = 0$, dvs

$$L'(x, \lambda)^T = \begin{bmatrix} L'_{x_1}(x, \lambda) \\ \vdots \\ L'_{x_n}(x, \lambda) \\ L'_\lambda(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_1(x) + \lambda g'_1(x) \\ \vdots \\ f'_n(x) + \lambda g'_n(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Detta kan skrivas

$$\begin{cases} f'(x)^T = -\lambda g'(x)^T \\ g(x) = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

Den första ekvationen är tangeringsvillkoret för de två nivåmängderna $f(x) = c$ och $g(x) = 0$, de två gradienterna $f'(x)$ och $g'(x)$ är kolinjära. Den andra ekvationen är bivillkoret. Om \bar{x} är extrempunkt så finns $\bar{\lambda}$ så att dessa ekvationer är uppfyllda. Alltså: $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ är kritisk punkt till L . Vi antar att $g'(\bar{x}) \neq 0$, för annars urartar tangeringsvillkoret. \square

Vi söker alltså en kritisk punkt till Lagrange-funktionen L utan restriktioner och samband mellan variablerna, dvs variabeln $(x, \lambda) \in \mathcal{D}(L) = \mathbb{R}^{n+1}$ är fri. Vi har inga randpunkter att undersöka, men det sker till priset att vi har fler variabler. Den extra variabeln λ kallas Lagrange-multiplikator. Det är inte intressant vilken typ av kritisk punkt det är.

Med $m < n$ bivillkor har vi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ och Lagrange-funktionen blir

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) \quad (2.44)$$

Obs att λ^T är rad-matris och $g(x)$ är kolonn-matris. Lagrange-ekvationerna $L'(x, \lambda)^T = 0$ blir nu

$$\begin{cases} f'(x)^T + g'(x)^T \lambda = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

istället för (2.43). I klartext blir detta

$$\begin{bmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_n(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g'_{1,1}(x) & \dots & g'_{m,1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g'_{1,n}(x) & \dots & g'_{m,n}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi lämnar beviset till problem 2.6.

Exempel 2.13 (Lagranges multiplikatormetod) En låda utan lock ska tillverkas med specificerad volym men så att materialåtgången blir minimal. Bestäm lådans dimensioner.

Lösning: Låt volymen vara V och sidornas längder x, y, z där z är höjden. Volymen är $V = xyz$ och materialåtgången ges av väggarnas area:

$$A = xy + 2xz + 2yz \quad (\text{bottenytan och fyra sidor}) \quad (2.47)$$

Vi vill minimera $xy + 2xz + 2yz$ under bivillkoren $xyz = V$ och $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Vi ser att om en av x, y, z är 0 så blir volymen $0 \neq V$, så extrempunkten är inte på randen av området $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Vi kan alltså ignorera olikhetsbivillkoren här.

Vi sätter upp Lagranges multiplikatormetod. Låt

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz, \quad g(x, y, z) = xyz - V \quad (2.48)$$

Vi ska minimera $f(x, y, z)$ under bivillkoret $g(x, y, z) = 0$. Lagrange-funktionen är

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V) \quad (2.49)$$

Kritisk punkt ges av

$$L'(x, y, z, \lambda)^T = \begin{bmatrix} y + 2z + \lambda yz \\ x + 2z + \lambda xz \\ 2x + 2y + \lambda xy \\ xyz - V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Fjärde ekvationen ger $z = V/(xy)$. Vi eliminerar λ ur de tre första ekvationerna:

$$-\lambda = \frac{y + 2z}{yz} = \frac{x + 2z}{xz} = \frac{2x + 2y}{xy} \quad (2.51)$$

Den andra likheten ger

$$\frac{y + 2z}{yz} = \frac{x + 2z}{xz} \Rightarrow 1 + \frac{2z}{y} = 1 + \frac{2z}{x} \Rightarrow x = y \quad (2.52)$$

Insättning av $z = V/(xy)$ och $x = y$ i den tredje likheten i (2.51) ger sedan lätt $x = y = (2V)^{1/3}$, $z = V/(xy) = \frac{1}{2}(2V)^{1/3}$, $\lambda = -4(2V)^{-1/3}$. Materialåtgången blir $A = f(x, y, z) = 3(2V)^{1/3}$.

Upprepa nu denna beräkning med dator! Sifferexempel: tag $V = \frac{1}{2}$, så att $(2V)^{1/3} = 1$ och $x = y = 1, z = \frac{1}{2}, \lambda = -4$ och $A = 3$.

2.5 Övningar

2.1 Extremvärden

2.2 Kritiska punkter

Övning 2.1 Undersök funktionen $f(x) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{8}{x_1} - x_2$ med avseende på lokala extrempunkter.

Övning 2.2 Undersök funktionen $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2$ med avseende på lokala extrempunkter.

Övning 2.3 Undersök funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2$ med avseende på lokala extrempunkter.

Övning 2.4 Undersök funktionen $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ med avseende på lokala extrempunkter.

2.3 Extremvärden i begränsade områden

Övning 2.5 Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^2y - x - y$ på den slutna triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.

Övning 2.6 Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - y + 1$ på den slutna triangeln med hörn i $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$.

Övning 2.7 Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x + y + 1$ i området $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y \geq -3$.

2.4 Lagranges multiplikatorometod

Övning 2.8 Beräkna största värdet av xyz under bivillkoren $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ och $x, y, z \geq 0$.

Övning 2.9 Beräkna maximala värdet av $x_1 + \dots + x_n$ då $\|x\| = 1$.

Övning 2.10 Beräkna maximala volymen av ett rätblock vars begränsningsyta är S . (Rätblock=låda med ortogonala hörn.)

Övning 2.11 Minimera $x^2y^4 + z^2$ över sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Övning 2.12 Bestäm max och min för funktionen $xy\sqrt{z}$ då x, y, z är icke negativa tal med $x + y + z = 1$.

2.6 Problem

2.1 Extremvärden

Problem 2.1 Bestäm konstanterna a, b så att $\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ blir minimal.

Problem 2.2 Vilken punkt på ytan $z = 5 - xy$ ligger närmast origo?

Problem 2.3 Skriv talet 20 som en summa av tre icke negativa delar x, y, z så att xyz^2 blir (a) minimal, (b) maximal.

2.2 Kritiska punkter

2.3 Extremvärden i begränsade områden

Problem 2.4 Bestäm värdemängden $\mathcal{R}(f)$ till funktionen $f(x) = x_1^2x_2$ med $\mathcal{D}(f) = \{x : \|x\| \leq 1\}$.

Problem 2.5 Bestäm värdemängden $\mathcal{R}(f)$ till funktionen $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ med $\mathcal{D}(f) = \{x : 0 \leq x_1 \leq 2, -1 \leq x_2 \leq 2\}$.

2.4 Lagranges multiplikator metod

Problem 2.6 Bevisa (2.45)–(2.46).

Problem 2.7 Beräkna Hesse-matrisen till Lagrange-funktionen $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$.

3. Randvärdesproblem och finita elementmetoden i en variabel

3.1	Partiella differentialekvationer	67
3.2	Den stationära värmeledningsekvationen	68
3.3	Randvillkor	69
3.4	Randvärdesproblem	71
3.5	Svag formulering	74
3.6	Finita elementmetoden i 1-D	78
3.7	Problem	81

3.1 Partiella differentialekvationer

Vi ska lösa *partiella differentialekvationer* (PDE), dvs ekvationer som innehåller partiella derivator av en okänd flervariabelfunktion $u = u(x, y, z)$. Till exempel, Laplaces ekvation,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

och Poissons ekvation,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Jämför *ordinär differentialekvation* (ODE) från läsperiod 2 som innehåller ordinära derivator av en okänd envariabelfunktion, till exempel,

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

En PDE ställs upp i ett område i rummet, $D \subset \mathbb{R}^3$, eller i planet, $D \subset \mathbb{R}^2$. För att lösningen ska vara unik behöver vi ge *randvillkor* på randen $S = \partial D$ till området D , till exempel,

$$u = 0 \quad \text{på } S.$$

Vi har då ett *randvärdesproblem*.

Man kan också studera tidsberoende PDE, till exempel, värmeledningsekvationen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

och vågekvationen,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

PDE uppträder inom många områden: värmeledning, diffusion, hållfasthet, vågutbredning, strömning, elektromagnetiska fält, kvantmekanik och så vidare. Trots olika bakgrund har dessa PDE väsentligen samma matematiska form. Observera, till exempel, att Laplace-operatören Δ , dvs

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ingår i samtliga exempel ovan.

Vi löser PDE numeriskt med *finita elementmetoden* (FEM). Denna metod är ett mycket viktigt verktyg för maskiningenjören. Metoden utvecklades på 1950-talet av maskiningenjörer för hållfasthetsberäkningar. FEM bygger på en omskrivning av randvärdesproblemet till en så kallad *svag formulering*.

För enkelhets skull börjar vi med att studera randvärdesproblem och FEM i en variabel, dvs $u = u(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$. PDE i flera variabler presenteras i ett senare kapitel.

Vi anger SI-enheter inom klammer, till exempel, [K] för temperatur i Kelvin, [m] för längd i meter, [J] för energi i Joule, där [J] = [Nm] Joule=Newtonmeter.

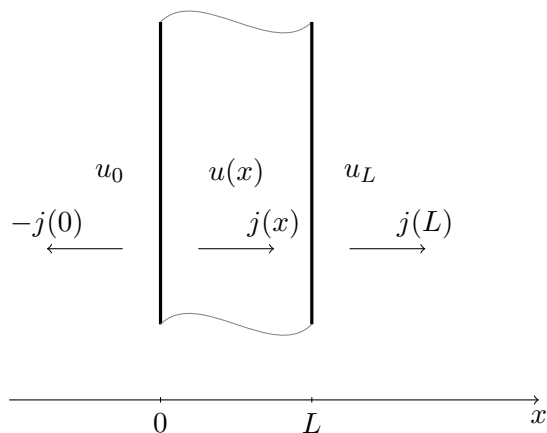
3.2 Den stationära värmeledningsekvationen

Temperaturen $u(x)$ [K] vid tvärsnittet x [m] i en platta med tjockleken L [m], se figur 3.1, ges av differentialekvationen

$$D(-a(x)Du(x)) = f(x), \quad x \in I = (0, L). \quad (3.1)$$

Här är

- $D = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{m} \right]$ derivata;
- $f(x) \left[\frac{J}{m^3 s} \right]$ värmekälltäthet;
- $u(x)$ [K] temperatur;
- $a(x) \left[\frac{J}{m K s} \right]$ värmeledningskoefficient;



Figur 3.1: Värmeledning i en platta.

- $j(x) = -a(x) Du(x) \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{ s}} \right]$ värmeflödestäthet i x -riktningen (Fouriers lag).

Vi antar här att inga kvantiteter beror av koordinaterna y och z . De beror inte heller på tiden, dvs vi studerar stationär (tidsoberoende) värmeledning. Samma ekvation kan också beskriva värmeledning i en smal stång av längden L . Notera att detta är en ODE. I detta kapitel betraktar vi denna variant av värmeledningsekvationen som given och målet är nu att lösa den. I ett senare kapitel ska vi härleda den allmänna värmeledningsekvationen från fysikaliska principer.

Dimensionskontroll: Kontrollera att enheterna i vänster- och högerled stämmer i differentialekvationen i (3.1).

3.3 Randvillkor

Vid $x = L$ gäller att värmeflödestätheten i *utåtriktningen* är proportionell mot temperaturskillnaden:

$$j(L) = k_L(u(L) - u_L), \quad (3.2)$$

där

- u_L [K] är den omgivande temperaturen;
- $u(L)$ [K] är temperaturen på insidan av ytan;
- $k_L \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{ K s}} \right]$ en värmeöverföringskoefficient.

Å andra sidan är ju flödestätheten enligt Fouriers lag:

$$j(L) = -a(L) Du(L).$$

Alltså:

$$-a(L) Du(L) = k_L(u(L) - u_L),$$

dvs

$$a Du + k_L(u - u_L) = 0 \quad \text{för } x = L.$$

Vid $x = 0$ är värmeflödestätheten i *utåtriktningen*

$$-j(0) = k_0(u(0) - u_0), \quad (3.3)$$

eftersom $-j(0)$ är flödestätheten i $-x$ -riktningen (utåt). Men vi har även $j(0) = -a(0) Du(0)$.

Alltså:

$$a(0) Du(0) = k_0(u(0) - u_0).$$

Sammanfattningsvis kan vi skriva:

$$a D_N u + k(u - u_A) = 0 \quad \text{för } x = 0, L. \quad (3.4)$$

Här är u_A den omgivande temperaturen (*ambient temperature*), dvs $u_A = u_0$ respektive $u_A = u_L$, koefficienten $k = k_0$ respektive $k = k_L$, och D_N riktningsderivatan i utåtriktningen (i den utåtriktade normalens riktning), dvs

$$D_N = -\frac{d}{dx} \text{ i } x = 0, \quad D_N = \frac{d}{dx} \text{ i } x = L.$$

Koefficienten k anger hur väl isolerad ändpunkten är.

Specialfall 1: $k = \infty$, ingen isolering. Om vi dividerar med k ,

$$\frac{1}{k} a D_N u + u - u_A = 0,$$

och låter $k \rightarrow \infty$ får vi $0 + u - u_A = 0$, dvs

$$u = u_A \quad \text{i } x = 0 \text{ eller } x = L.$$

Detta randvillkor innebär att den aktuella ändpunkten, $x = 0$ eller $x = L$, inte är isolerad. Temperaturen är densamma på insidan och på utsidan av randytan.

Specialfall 2: $k = 0$, perfekt isolering. Med $k = 0$ får vi

$$a D_N u = 0,$$

dvs inget värmeflöde genom den aktuella ändpunkten. Eftersom $a > 0$ kan detta förenklas till

$$D_N u = 0 \quad \text{i } x = 0 \text{ eller } x = L.$$

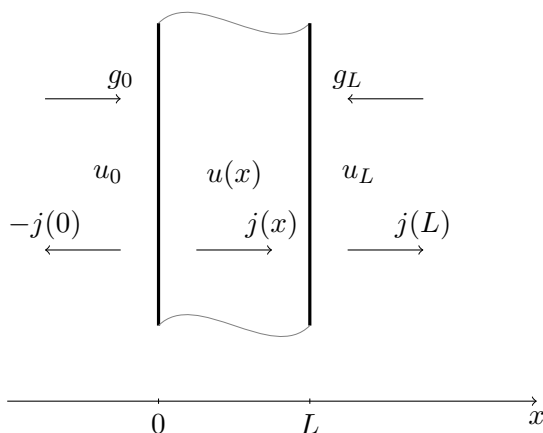
3.4 Randvärdesproblem

Genom att sätta samman (3.1) och (3.4) får vi ett randvärdesproblem.

Definition 3.1 (Randvärdesproblem) Finn u sådan att

$$\begin{aligned} -D(aDu) &= f && \text{för } x \in I = (0, L) \\ aD_N u + k(u - u_A) &= g && \text{för } x = 0, L \end{aligned} \quad (3.5)$$

Här har vi lagt till ett föreskrivet *inflöde* av värme med flödestätheten g , där $g = g_0$ respektive $g = g_L$, se figur 3.2. Detta görs genom att lägga till termerna $-g_L$ respektive $-g_0$ i (3.2) och (3.3).



Figur 3.2: Värmeledning i en platta (med inflöde på randen).

Randvärdesproblemet kan i princip lösas genom att integrera differentialekvationen två gånger och bestämma de två integrationskonstanterna med hjälp av de två randvillkoren. Oftast blir det omöjliga räkningar. Därför ska vi använda FEM! Men först några handräkningsexempel.

Exempel 3.1 Ett enkelt exempel:

$$\begin{cases} -D(5Du) = 0, & \text{i } I = (0, 1), \\ -5Du(0) + 3(u(0) - 2) = 0, & \text{(isolering)} \\ u(1) = 0. & \text{(ingen isolering)} \end{cases}$$

Här är $a = 5$, $f = 0$, $L = 1$, $k_0 = 3$, $u_0 = 2$, $g_0 = 0$, $k_1 = \infty$, $u_1 = 0$, $g_1 = 0$.

Integrera två gånger:

$$\begin{aligned} -5Du(x) &= C_1 \\ Du(x) &= -\frac{1}{5}C_1 \\ u(x) &= -\frac{1}{5}C_1x + C_2 \end{aligned}$$

Randvillkoren ger:

$$\begin{aligned} 0 &= -5Du(0) + 3(u(0) - 2) = C_1 + 3C_2 - 6 \\ 0 &= u(1) = -\frac{1}{5}C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Vi får ett linjärt ekvationssystem som löses med Gauss eliminationsmetod:

$$\begin{cases} C_1 + 3C_2 = 6, \\ -C_1 + 5C_2 = 0, \end{cases} \quad C_2 = \frac{3}{4}, \quad C_1 = \frac{15}{4}$$

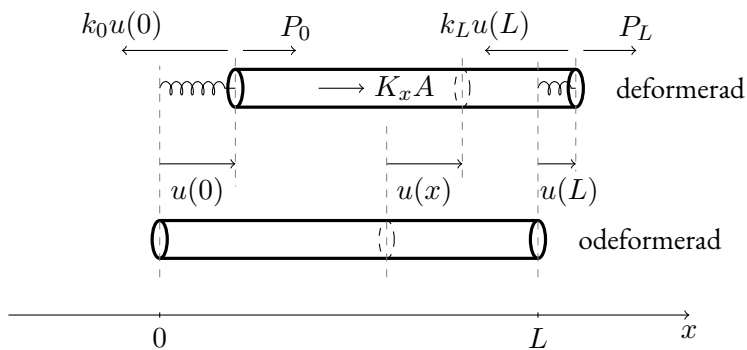
Temperaturen och värmeflödestätheten blir

$$u(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, \quad j(x) = -aDu(x) = -5Du(x) = C_1 = \frac{15}{4}$$

Värme flödar åt höger ($j(x) > 0$), från den varma sidan ($u_0 = 2$) till den kalla ($u_1 = 0$).

Observera strukturen hos ekvationerna i randvärdesproblemet (3.5). Även mekanikens ekvationer har denna form. Till exempel:

Axiellt belastad stång. För en axiellt belastad stång med fjädrande upphängning i ändpunkterna, figur 3.3, har vi följande randvärdesproblem:



Figur 3.3: Axiellt belastad stång.

$$\begin{cases} -D(EADu) = K_x A & \text{för } x \in I = (0, L), \\ EAD_N u + ku = P & \text{för } x = 0, L. \end{cases} \quad (3.6)$$

Här är

- u [m] axiell förskjutning i x -riktningen;
- $E \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$ Youngs modul, A [m²] tvärsnittsarea, EA [N] styvhet;
- $K_x \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]$ lasttäthet, $K_x A \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ last i x -riktningen;
- $P = P_0$ eller $P = P_L$ [N] kraft i x -riktningen;
- $k = k_0$ eller $k = k_L \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ fjäderkonstant;
- $\mathcal{N} = EADu$ [N] snittkraft i normalriktningen (Hookes lag).

Dessa kan bero på x . $\mathcal{N}(x)$ är sålunda den normalriktade snittkraften i tvärsnittet vid x . $\mathcal{N}(x)/A(x)$ [N/m²] är spänningen och $Du(x)$ [1] (dimensionslös) är töjningen.

Randvillkoren uttrycker kraftbalans i ändpunkterna:

$$-\mathcal{N}(0) = P_0 - k_0 u(0), \quad \mathcal{N}(L) = P_L - k_L u(L).$$

Specialfall 1: $k = \infty$, **fast inspänd ände.** Då $k \rightarrow \infty$ får vi $u = 0$. Det betyder oändligt styv fjädring, dvs stängen är fast inspänd i den aktuella ändpunkten $x = 0$ respektive $x = L$.

Specialfall 2: $k = 0$, **fri ände.** Med $k = 0$ blir randvillkoret $EAD_N u = P$. Det betyder ingen fjäderkraft och om även $P = 0$ så är den aktuella ändpunkten fri.

Konstitutiva lagar. Ekvationen $\mathcal{N} = EADu$ är Hookes lag. Den spelar samma roll som Fouriers lag $j = -aDu$ i värmeledning. Dessa är exempel på konstitutiva lagar som beskriver materialets egenskaper.

Observera analogin mellan värmeledning och mekanik. Till exempel:

$$\begin{aligned} u &\longleftrightarrow u \\ a &\longleftrightarrow EA \\ j &\longleftrightarrow \mathcal{N} \\ g &\longleftrightarrow P \\ k &\longleftrightarrow k \\ f &\longleftrightarrow K_x A \end{aligned}$$

Exempel 3.2 Vi studerar en stång med konstant styvhet som är fast inspänd i högra änden och fri i vänstra änden. Den belastas endast med en kraft i vänstra änden. Randvärdesproblemet blir

$$\begin{cases} -D(EADu) = 0 & \text{för } x \in I = (0, L), \\ -EADu(0) = P_0, u(L) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Eftersom EA är konstant blir differentialekvationen $u''(x) = 0$ med allmän lösning $u(x) = Cx + D$ (integrera två gånger). Randvillkoren ger

$$P_0 = -EAu'(0) = -EAC, \quad 0 = u(L) = CL + D,$$

med lösning $C = -P_0/EA$, $D = -CL$. Alltså:

$$u(x) = \frac{P_0}{EA}(L - x).$$

Vi ser att om $P_0 > 0$ (tryckkraft) så blir $u(x) > 0$, dvs stängen trycks ihop (förskjutningen är positiv, rörelse åt höger). Då blir normalkraften $N(x) = EADu(x) = -P_0$ (negativ, dvs tryckkraft). Om $P_0 < 0$ (dragkraft) så blir $u(x) < 0$, dvs stängen förlängs.

3.5 Svag formulering

Vi skriver nu om randvärdesproblemet i definition 3.1 till en ekvivalent form som kallas *den svaga formuleringen*. Den är grunden för finita elementmetoden.

Den svaga formuleringen är baserad på skalärprodukt. Från linjär algebra erinrar vi oss att man kan definiera en skalärprodukt för funktioner i funktionsrummet $V = \mathcal{C}([0, L])$:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x)g(x) dx \quad (3.8)$$

Denna uppfyller alla villkor för skalärprodukt. Ett viktigt villkor är att den är positivt definit:

$$\langle f, f \rangle > 0 \quad \forall f \in V, f \neq 0 \quad (3.9)$$

Det är klart att $\langle f, f \rangle \geq 0$ för alla f , dvs positivt semidefinit. Antag nu att $\langle f, f \rangle = 0$, dvs $\langle f, f \rangle = \int_0^L f(x)^2 dx = 0$. Detta medför att $f(x)^2 = 0$ för alla $x \in [0, L]$, dvs $f = 0$. Alltså: positivt definit. Då kan vi definiera en norm för funktioner:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^L f(x)^2 dx} \quad (3.10)$$

Den har den viktiga egenskapen att $\|f\| = 0$ om och endast om $f = 0$.

Differentialekvationen i definition 3.1 kan skrivas som

$$Au - f = 0 \quad (3.11)$$

med differentialoperatoren A som definieras av $Au = -D(aDu)$. Om vi bildar skalärprodukten av denna ekvation med en godtycklig funktion $v \in V$ så får vi

$$\langle Au - f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \quad (3.12)$$

Å andra sidan, om (3.12) gäller så kan vi ta $v = Au - f$ och får

$$\|Au - f\|^2 = \langle Au - f, Au - f \rangle = 0 \quad (3.13)$$

vilket leder till $Au - f = 0$.

Vi drar slutsatsen att (3.11) och (3.12) är ekvivalenta, dvs om u är lösning till den ena ekvationen så är den också en lösning till den andra. Ekvationen (3.12) är på svag form, vilket innebär att man testat ekvationen med alla funktioner $v \in V$. Funktionerna v kallas testfunktioner. Ekvationen (3.11) kan då sägas vara på stark form. Det är inte meningsfullt att formulera detta som en sats, eftersom ekvationen (3.11) inte är entydigt lösbar utan randvillkoren i definition 3.1. Vi formulerar istället en svag formulering där randvillkoren är inbakade.

Definition 3.2 (Svag formulering) Finn en funktion u sådan att ekvationen

$$\begin{aligned} \int_0^L a Du Dv dx + k_0 u(0)v(0) + k_L u(L)v(L) \\ = \int_0^L f v dx + (k_0 u_0 + g_0)v(0) + (k_L u_L + g_L)v(L) \end{aligned} \quad (3.14)$$

är uppfylld för alla funktioner v .

För att den svaga formuleringen ska vara helt korrekt måste man även ange vilket funktionsrum som u och v ska tillhöra, dvs finn $u \in V$ så att (3.14) är uppfylld för alla $v \in V$ med ett visst funktionsrum V . Det visar sig att $V = \mathcal{C}([0, L])$ inte fungerar; man måste använda ett funktionsrum av deriverbara funktioner. Vi preciserar inte det här. Den godtyckliga funktionen v kallas *testfunktion*.

Man kan visa att det svaga problemet har en unik lösning. Beviset är mer generellt än det bevis som bygger på att integrera den starka differentialekvationen två gånger. Det fungerar nämligen också för randvärdesproblem i flera variabler. Det är också enklare i en viss mening, men kräver att man använder en matematisk teori som kallas *funktionalanalys*. Därför kan vi inte presentera det här. Den ursprungliga formuleringen kan kallas stark form. Dessa är ekvivalenta enligt nästa sats.

Sats 3.1 (Stark och svag form är ekvivalenta) En två gånger deriverbar funktion u är lösning till randvärdesproblemet i definition 3.1 om och endast om den är lösning till det svaga problemet i definition 3.2.

Bevis. Antag att u löser det starka problemet. Vi bildar skalärprodukten av differentialekvationen

$$-D(a Du) = f$$

med en godtycklig funktion v och använder sedan partialintegration:

$$\begin{aligned} \int_0^L f v \, dx &= - \int_0^L D(a Du) v \, dx \\ &= - \left[a Du v \right]_0^L + \int_0^L a Du Dv \, dx \\ &= a(0) Du(0) v(0) - a(L) Du(L) v(L) + \int_0^L a Du Dv \, dx. \end{aligned}$$

Nu använder vi även randvillkoren från (3.5):

$$\begin{aligned} a(0) Du(0) &= k_0(u(0) - u_0) - g_0, \\ -a(L) Du(L) &= k_L(u(L) - u_L) - g_L. \end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{aligned} \int_0^L f v \, dx &= \left(k_0(u(0) - u_0) - g_0 \right) v(0) + \left(k_L(u(L) - u_L) - g_L \right) v(L) \\ &\quad + \int_0^L a Du Dv \, dx. \end{aligned}$$

Vi samlar alla termer som innehåller den obekanta funktionen u i vänsterledet:

$$\begin{aligned} \int_0^L a Du Dv \, dx + k_0 u(0) v(0) + k_L u(L) v(L) \\ = \int_0^L f v \, dx + (k_0 u_0 + g_0) v(0) + (k_L u_L + g_L) v(L). \end{aligned}$$

Denna ekvation är uppfylld för alla val av funktionen v . Alltså löser u det svaga problemet.

Om u löser det svaga problemet så visar man att den löser det starka problemet genom att göra ovanstående steg i motsatt ordning. Vi genomför inte det här. \square

Randvillkoret $u = u_A$ ($k = \infty$) är lite speciellt. Då måste man välja testfunktionerna med $v = 0$ i den ändpunkt där randvillkoret $u = u_A$ gäller. Då blir motsvarande term $v(0) = 0$ och/eller $v(L) = 0$ i (3.14). Vi illustrerar detta i två exempel.

Exempel 3.3 Vi skriver ned den svaga formuleringen av exempel 3.2. Där har vi randvillkoren $-EA Du(0) = P_0$, $u(L) = 0$. Vi ska alltså använda testfunktioner med $v(L) = 0$. Dessutom har vi $k_0 = 0$ och ingen kraft, $K_x A = 0$, vilket motsvarar $f = 0$ i (3.14). Den svaga formuleringen av (3.7) blir: Finn en funktion $u = u(x)$ med $u(L) = 0$ och sådan att

ekvationen

$$\int_0^L EA Du Dv dx = P_0 v(0)$$

är uppfylld för alla testfunktioner v med $v(L) = 0$.

Vi kontrollerar att lösningen $u(x) = \frac{P_0}{EA}(L - x)$ uppfyller den svaga ekvationen. Vi har $EA Du = -P_0$ så att

$$\int_0^L EA Du Dv dx = -P_0 \int_0^L Dv dx = -P_0(v(L) - v(0)) = P_0 v(0)$$

för alla v med $v(L) = 0$.

Exempel 3.4

$$\begin{cases} -D((1+x^2)Du) = 1 & \text{i } (-1, 1), \\ u(-1) = 0, \quad Du(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Skriv ned den svaga formuleringen.

(b) Lös problemet genom att integrera två gånger.

Lösning. (a) Randvillkoret $u(-1) = 0$ kräver att vi använder testfunktionen v sådan att $v(-1) = 0$. Vi multiplicerar med v och integrerar:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 v dx &= - \int_{-1}^1 D((1+x^2)Du) v dx \quad \left\{ \text{partiell integration} \right\} \\ &= - \left[(1+x^2) Du(x) v(x) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (1+x^2) Du Dv dx \\ &= -2 \underbrace{Du(1)}_{=0} v(1) + 2 Du(-1) \underbrace{v(-1)}_{=0} + \int_{-1}^1 (1+x^2) Du Dv dx \\ &= \int_{-1}^1 (1+x^2) Du Dv dx. \end{aligned}$$

Den svaga formuleringen är: Finn $u = u(x)$ sådan att $u(-1) = 0$ och

$$\int_{-1}^1 (1+x^2) Du Dv dx = \int_{-1}^1 v dx \quad \text{för alla } v \text{ med } v(-1) = 0.$$

(b) Differentialekvationen är

$$D((1+x^2)Du) = -1$$

Vi integrerar:

$$\begin{aligned} (1+x^2) Du &= -x + C, \\ Du(x) &= -\frac{x}{1+x^2} + \frac{C}{1+x^2}, \\ u(x) &= -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \arctan(x) + D. \end{aligned}$$

Randvillkoren ger:

$$0 = u(-1) = -\frac{1}{2} \ln(2) + C \arctan(-1) + D = -\frac{1}{2} \ln(2) - C \frac{\pi}{4} + D,$$

$$0 = Du(1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}C.$$

Vi får $C = 1$, $D = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4}$. Lösningen är

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4} \\ &= \ln \left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \right) + \arctan(x) + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Du bör lära dig att bestämma den svaga formuleringen för randvärdesproblem med olika kombinationer av randvillkor samt att lösa *enkla* randvärdesproblem genom att integrera två gånger, se övningarna. Men det viktigaste är att kunna lösa *allmänna* randvärdesproblem med finita elementmetoden. Det gör vi i ett senare kapitel.

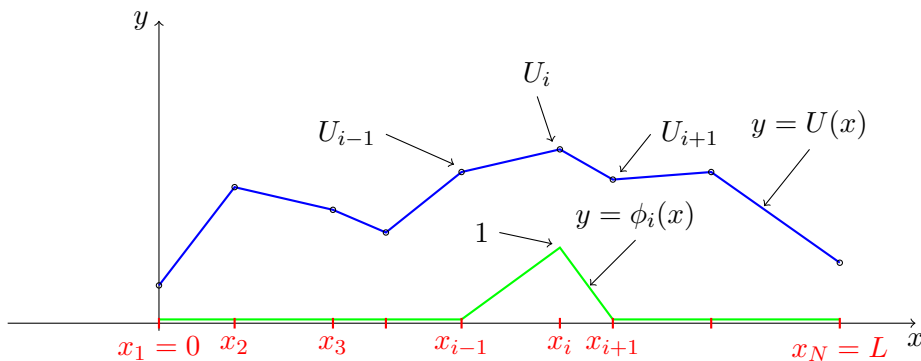
3.6 Finita elementmetoden i 1-D

(Finita elementmetoden kallas "finite element method" på engelska, uttalas "fajnajt". Nedan anger vi inom parentes vad vissa viktiga begrepp heter på engelska.)

Vi ska beräkna en approximativ lösning $U(x)$, som är en *styckvis linjär funktion*. Vi inför ett beräkningsnät (*mesh*) i intervallet $I = (0, L)$:

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_N = L.$$

Obs: vi använder "MATLAB-numrering" som börjar med 1. Vi har alltså N punkter (kallas även noder) x_i och $N - 1$ intervall $I_i = (x_i, x_{i+1})$ av längd $h_i = x_{i+1} - x_i$. Se figur 3.4.



Figur 3.4: En styckvis linjär funktion $y = U(x)$ och en basfunktion $y = \phi_i(x)$.

En kontinuerlig styckvis linjär funktion $U(x)$ är entydigt bestämd av sina nodvärden $U_i = U(x_i)$. För att beskriva $U(x)$ inför vi *basfunktionerna* $\phi_i(x)$, en för varje nod x_i . Funktionerna $\phi_i(x)$ bestäms av att de är kontinuerliga, styckvis linjära, samt att

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Se figur 3.4. Funktionen $U(x)$ kan nu skrivas som en linjär kombination av basfunktionerna:

$$U(x) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x), \quad \text{med koefficienterna } U_i = U(x_i).$$

Obs att

$$U(x_j) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x_j) = U_j$$

eftersom $\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ innebär att endast en term (med $i = j$) blir kvar i summan.

Vi har nu en formel som uttrycker $U(x)$ med hjälp av nodvärdena. Vi ska nu bestämma de okända nodvärdena U_i så att $U(x)$ blir en approximativ lösning till randvärdesproblemet (3.5). Vi använder den svaga formuleringen i (3.14). För att det inte ska bli så mycket att skriva genomför vi detta i fallet då $k_0 = k_L = 0, g_0 = g_L = 0$:

$$\int_0^L a D u D v \, dx = \int_0^L f v \, dx \quad \text{för alla } v. \quad (3.15)$$

Istället för $u(x)$ sätter vi in ansatsen $U(x) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x)$ och vi väljer testfunktionerna $v = \phi_j$. Vi får

$$\sum_{i=1}^N U_i \int_0^L a D \phi_i D \phi_j \, dx = \int_0^L f \phi_j \, dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

Med beteckningarna

$$a_{ij} = a_{ji} = \int_0^L a D \phi_i D \phi_j \, dx, \quad b_j = \int_0^L f \phi_j \, dx,$$

blir detta

$$\sum_{i=1}^N a_{ji} U_i = b_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

dvs på matrisform:

$$AU = b.$$

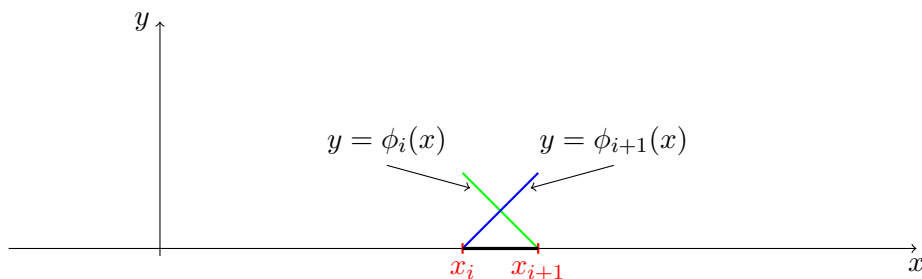
Detta är ett linjärt ekvationssystem av N ekvationer för N obekanta. Matrisen

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L a D\phi_i D\phi_j dx \right\}_{i,j=1}^N$$

kallas *styvhetsmatrix* (*stiffness matrix*). Jämför med stångens ekvation, där $a = EA$ är materialets styvhet. Styvhetsmatrisen är *symmetrisk*, $a_{ji} = a_{ij}$, och *tridiagonal*,

$$A = \begin{bmatrix} * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & * & 0 \\ \vdots & \ddots & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

dvs $a_{ij} = 0$ utom då $j = i-1, i, i+1$. Vektorn $b = \{b_j\}_{j=1}^N = \left\{ \int_0^L f \phi_j dx \right\}_{j=1}^N$ kallas *lastvektor* (*load vector*). Intervallet $I_i = (x_i, x_{i+1})$ tillsammans med sina två basfunktioner ϕ_i, ϕ_{i+1} kallas ett *finit element*, se figur 3.5.



Figur 3.5: Ett finit element.

Ekvationssystemet $AU = b$ kan enkelt ställas upp och lösas med hjälp av ett datorprogram, till exempel, `MyPoissonSolver.m` i datorövningarna.

Programmet löser mer allmänna randvärdesproblem av formen

$$\begin{cases} -D(aDu) + dDu + cu = f & \text{för } x \in I = (0, L), \\ aD_N u + k(u - u_A) = g & \text{för } x = 0, L. \end{cases}$$

Här har vi även en *konvektionsterm* dDu och en *reaktionsterm* cu .

Randvillkor av typen $u = u_A$ ($k = \infty$) hanteras i detta program approximativt genom att man sätter k lika med ett stort tal, till exempel, $k = 10^8$.

3.7 Problem

3.1 Randvärdesproblem

Problem 3.1 (Stång) Bestäm den svaga formuleringen.

$$\begin{cases} -D(EADu) = K_x A & \text{i } (0, L) \\ u(0) = 0, \quad EADu(L) = P \end{cases}$$

Problem 3.2 Bestäm den svaga formuleringen.

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{i } (0, L) \\ -u'(0) + u(0) = g_0, \quad u(L) = 0 \end{cases}$$

Problem 3.3 (Fritt upplagd balk) Bestäm den svaga formuleringen.

$$\begin{cases} D^2(EID^2w) = q & \text{i } (0, L) \\ w(0) = 0, \quad w(L) = 0 \\ D^2w(0) = 0, \quad D^2w(L) = 0 \end{cases}$$

Här är w [m] utböjning, $I = I_y$ [m⁴] tvärsnittets tröghetsmoment med avseende på y -axeln, EI [Nm²] böjstyvhet och q [N/m] lasttätet i z -riktningen (uppåt). Vridmomentet med avseende på y -axeln är $M = -EID^2w$ [Nm]. Tips: $v(0) = 0, v(L) = 0$. Integrera partiellt två gånger.

Problem 3.4 Lös randvärdesproblemet genom upprepad integration.

$$\begin{cases} -u'' = 1 & \text{i } (0, 1) \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

Problem 3.5 Lös randvärdesproblemet genom upprepad integration.

$$\begin{cases} -D((1+x)Du) = 2x & \text{i } (0, 1) \\ -Du(0) + u(0) = 0, \quad u(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Problem 3.6 Lös randvärdesproblemet genom upprepad integration.

$$\begin{cases} -D(aDu) = 0 & \text{i } (0, L) \text{ med konstant } a > 0 \\ u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L \end{cases}$$

Beräkna även värmeflödestätheten $j = -aDu$.

Problem 3.7 (Fritt upplagd balk) Lös randvärdesproblemet genom upprepad integration.

$$\begin{cases} D^2(EID^2w) = q & \text{i } (0, L) \text{ med } EI \text{ och } q \text{ konstanta} \\ w(0) = 0, \quad w(L) = 0 \\ D^2w(0) = 0, \quad D^2w(L) = 0 \end{cases}$$

Problem 3.8 Lös randvärdesproblemet genom upprepad integration.

$$\begin{cases} -au'' + u' = 1 & \text{i } (0, 1) \text{ med konstant } a > 0 \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

Problem 3.9 Betrakta värmeledningsproblemet i en platta:

$$\begin{cases} -D(a(x)Du(x)) = f & \text{för } x \in (L, 2L) \\ u(L) = 0, \quad Du(2L) = 0 \end{cases}$$

Här är värmeledningskoefficienten $a(x) = a_0x/L$ där a_0 [J/(m s K)] är konstant och värmekälltätheten f [J/(m³s)] är konstant. (a) Beräkna temperaturen $u(x)$. (b) Bestäm värmeflödestätheten vid ränderna $x = L$ och $x = 2L$. Resonera om hur värme flödar i plattan och genom ränderna.

Problem 3.10 Randvärdesproblemet för en stång som är fast inspänd i ena änden och utsatt för en dragkraft i den andra är:

$$\begin{cases} -D(EADu) = 0 & \text{för } x \in I = (0, L) \\ u(0) = 0, \quad EA(L)u'(L) = P \end{cases}$$

Antag att tvärsnittsarean varierar enligt $A(x) = \frac{A_0}{1 + \gamma x/L}$. Här är P, E, L, A_0 givna och γ en parameter. Bestäm γ så att förlängningen av stången $u(L)$ får ett föreskrivet värde ΔL , dvs $u(L) = \Delta L$.

4. Multipelintegraler

4.1	Dubbelintegralen	83
4.2	Beräkning av dubbelintegralen	88
4.3	Variabelsubstitution i dubbelintegralen	91
4.4	Generaliserad dubbelintegral	95
4.5	Trippelintegralen	98
4.6	Variabelsubstitution i trippelintegralen	103
4.7	Medelvärden, moment	107
4.8	Övningar	110
4.9	Problem	112

Vi studerar integraler i 2 och 3 variabler.

4.1 Dubbelintegralen

I del II konstruerade vi integralen $\int_a^b f(x) dx$ av en envariabelfunktion. Vi påminner om hur det går till. Motivationen för konstruktionen är att definiera arean under grafen $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, då $f \geq 0$ (eller arean med tecken om f växlar tecken). Arean stängs in mellan övre och undre Riemann-summor med avseende på en partition av intervallet. Om dessa Riemann-summor konvergerar mot ett unikt gränsvärde då partitionen förfinas, så säger vi att f är integrerbar.

Vi börjar med att göra en partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ av intervallet $I = [a, b]$ med punkter $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i \dots < x_n = b$, delintervall $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ och med steglängder $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Den maximala steglängden betecknas $\Delta x = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

Låt nu f vara en begränsad funktion definierad på $[a, b]$ och låt $f_{\min}^i = \inf_{I_i} f$ vara största undre begränsning och $f_{\max}^i = \sup_{I_i} f$ minsta övre begränsning till mängden $\{f(x) : x \in I_i\}$ så att $f_{\min}^i \leq f(x) \leq f_{\max}^i$ på delintervallet $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Vi definierar den undre, $\mathcal{I}_{\min}(f, P)$, och övre, $\mathcal{I}_{\max}(f, P)$, Riemann-summan av funktionen f med partitionen P som

$$\mathcal{I}_{\min}(f, P) = \sum_{i=1}^n f_{\min}^i \Delta x_i \tag{4.1}$$

$$\mathcal{I}_{\max}(f, P) = \sum_{i=1}^n f_{\max}^i \Delta x_i \tag{4.2}$$

Den undre summan växer och den övre summan avtar då partitionen förfinas, dvs då $\Delta x \rightarrow 0$. Om det finns ett unikt tal \mathcal{I} sådant att $\mathcal{I}_{\min}(f, P) \leq \mathcal{I} \leq \mathcal{I}_{\max}(f, P)$ för alla partitioner P , säger vi att $f(x)$ är integrerbar på $[a, b]$ och talet \mathcal{I} är integralen av f på $[a, b]$. Den tecknas

$$\int_I f \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \quad (4.3)$$

Det är svårt att avgöra vilka funktioner som är integrerbara, men sats 1.2 i del II säger att kontinuerliga funktioner är integrerbara. För kontinuerliga funktioner är det dessutom enklare att beräkna Riemann-summorna: man behöver inte använda infimum och supremum. Det finns nämligen punkter i I_i där en kontinuerlig funktion antar sitt minimum och sitt maximum, dvs evalueringpunkter sådana att $f_{\min}^i = \min_{I_i} f = f(c_{\min}^i)$ och $f_{\max}^i = \max_{I_i} f = f(c_{\max}^i)$. Man kan till och med använda Riemann-summan $\mathcal{I}(f, P) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ med godtyckliga evalueringpunkter $c_i \in I_i$. Om f är kontinuerlig på $I = [a, b]$, så gäller alltså

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \, dx \quad (4.4)$$

Vi ska nu upprepa denna konstruktion för flervariabelfunktioner. Vi börjar med att integrera $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ över en rektangel $R = [a, b] \times [c, d]$, dvs dubbelintegralen

$$\iint_R f \, dA = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy \quad (4.5)$$

Målet är att definiera volymen under grafen $z = f(x, y)$, $(x, y) \in R$, då $f \geq 0$ (volymen med tecken om f växlar tecken). Stegen i konstruktionen är desamma som för envariabelfunktioner.

Definition 4.1 (Partition av rektangel) Låt $P = \{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m\}$ vara en mängd av punkter sådana att $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$, och $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_m = d$, för $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. P kallas en partition av rektangeln $R = [a, b] \times [c, d]$ i nm delrektanglar $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ med steglängder $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, för $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Den maximala diametern av delrektanglarna betecknas $h = \max_{i,j} \text{diam}(R_{ij})$.

Definition 4.2 (Undre och övre Riemann-summa) Låt P vara en partition av $R = [a, b] \times [c, d]$ i nm delrektanglar $R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ och $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion definierad på R . Vidare låt $f_{\min}^{i,j} = \inf_{R_{i,j}} f$ vara största undre begränsning och $f_{\max}^{i,j} = \sup_{R_{i,j}} f$ minsta övre begränsning till mängden $\{f(x, y) : (x, y) \in R_{i,j}\}$ så att $f_{\min}^{i,j} \leq f(x, y) \leq f_{\max}^{i,j}$ på delrektangeln $R_{i,j}$ för $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Vi definierar den undre $\mathcal{I}_{\min}(f, P)$ och den övre $\mathcal{I}_{\max}(f, P)$ Riemann-summan av funktionen

f med partitionen P som

$$\mathcal{I}_{\min}(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{\min}^{i,j} \Delta x_i \Delta y_j \quad (4.6)$$

$$\mathcal{I}_{\max}(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{\max}^{i,j} \Delta x_i \Delta y_j \quad (4.7)$$

Antag för enkelhets skull att $f \geq 0$ på R . Vi noterar att termen $f_{\min}^{i,j} \Delta x_i \Delta y_j$ är volymen av en pelare med basytan $\Delta x_i \Delta y_j$ och höjden $z = f_{\min}^{i,j}$. Motsvarande för $f_{\max}^{i,j} \Delta x_i \Delta y_j$. Riemannsumorna $\mathcal{I}_{\min}(f, P)$ och $\mathcal{I}_{\max}(f, P)$ är alltså volymer som begränsar volymen under grafen $z = f(x, y)$ underifrån respektive uppifrån. De närmar sig varandra när partitionen förfinas och konvergerar mot volymen under grafen, förutsatt att denna volym existerar. Nästa definition preciserar detta.

Definition 4.3 (Dubbelintegralen) Låt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion definierad på rektangeln $R = [a, b] \times [c, d]$. Vidare låt $\mathcal{I}_{\min}(f, P)$ och $\mathcal{I}_{\max}(f, P)$ vara undre och övre Riemann-summor med en partition P av R . Om det finns ett unikt tal \mathcal{I} sådant att $\mathcal{I}_{\min}(f, P) \leq \mathcal{I} \leq \mathcal{I}_{\max}(f, P)$ för alla P , så säger vi att f är integrerbar på R och talet \mathcal{I} är integralen av f över R . Vi skriver

$$\mathcal{I} = \iint_R f \, dA = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy \quad (4.8)$$

Symbolen $dA = dx \, dy$ kallas areaelement.

Sats 4.1 (Kontinuerliga funktioner är integrerbara) Om $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på rektangeln $R = [a, b] \times [c, d]$, så är f integrerbar på R och alla Riemann-summor $\mathcal{I}(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$, med partition P och godtyckliga evalueringspunkter $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \in R_{ij}$, konvergerar mot integralen, dvs

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j \rightarrow \iint_R f \, dA \quad \text{då } h = \max_{i,j} \text{diam}(R_{ij}) \rightarrow 0 \quad (4.9)$$

Beviset är helt analogt med beviset för Sats 1.2 i del II och vi upprepar inte det här.

Nästa sats säger att dubbelintegralen över en rektangel kan beräknas som två enkelintegraler med avseende på x och y i valfri ordning.

Sats 4.2 (Fubinis sats) Om $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på rektangeln $R = [a, b] \times$

$[c, d]$, så kan dubbelintegralen beräknas med upprepade enkelintegraler:

$$\iint_R f \, dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \quad (4.10)$$

Bevis. Riemann-summan i (4.9) är

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \Delta x_i \right) \Delta y_j \quad (4.11)$$

Den inre summan är en Riemann-summa för enkelintegralen $F(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$ och den yttre summan är en Riemann-summa för enkelintegralen $\int_c^d F(y) \, dy$. Detta visar den första varianten i (4.10). Den andra visas på liknande sätt. \square

Exempel 4.1 (Upprepad integration över rektangel) Vi integrerar $f(x, y) = \sin(x + y)$ över rektangeln $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi]$. Fubinis sats 4.2 ger

$$\iint_R f \, dA = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi} \sin(x + y) \, dy \right) dx \quad (4.12)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\cos(x + y) \right]_0^{\pi} dx \quad (4.13)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos(x + \pi) + \cos(x) \right) dx \quad (4.14)$$

$$= \left[-\sin(x + \pi) + \sin(x) \right]_0^{\pi/2} \quad (4.15)$$

$$= -\sin(3\pi/2) + \sin(\pi/2) = 2 \quad (4.16)$$

Exempel 4.2 (Separabel dubbelintegral) Vi integrerar $f(x, y) = xy$ över rektangeln $R = [1, 2] \times [3, 4]$. Riemann-summan i (4.9) är

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{x}_i \tilde{y}_j \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \Delta x_i \sum_{j=1}^m \tilde{y}_j \Delta y_j \quad (4.17)$$

och integralen separeras på motsvarande sätt

$$\iint_R f \, dA = \iint_R xy \, dx \, dy = \int_1^2 x \, dx \int_3^4 y \, dy = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_3^4 = \frac{21}{4} \quad (4.18)$$

Detta följer givetvis även direkt från Fubinis sats 4.2.

I en variabel integrerar man endast över intervall. I två variabler kan man vilja integrera över andra mängder än rektanglar. I nästa definition visar vi hur man kan integrera över mätbara mängder. Vagt uttryckt säger vi att en mängd D är *mätbar* om man kan definiera dess area. Att precisera detta är alltför avancerat för denna kurs, men vi har gott om exempel från del II: området mellan två grafer av kontinuerliga funktioner är mätbart och arean ges av en integral. Vi ska utnyttja detta i avsnitt 4.2.

Definition 4.4 (Dubbelintegralen över allmänt område) Låt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion definierad på den mätbara och begränsade mängden $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Låt R vara en rektangel sådan att $D \subseteq R$ och definiera funktionen $f_D: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ enligt

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{om } (x, y) \in D \\ 0 & \text{om } (x, y) \in R \setminus D \end{cases} \quad (4.19)$$

Om f_D är integrerbar över R , så säger vi att f är integrerbar över D med integralen

$$\iint_D f \, dA = \iint_R f_D \, dA \quad (4.20)$$

Definitionen är rimlig därför att integralen (om den existerar) inte beror på värdena av f utanför D och den är därför oberoende av valet av rektangeln R .

Man kan visa att om f är kontinuerlig och begränsad på en mätbar och begränsad mängd D , så är den integrerbar över D .

Innan vi ger fler exempel på hur man räknar ut dubbelintegraler, presenterar vi integralens viktigaste egenskaper i en sats.

Sats 4.3 (Dubbelintegralens egenskaper) Låt $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara integrerbara på

mängden $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Då gäller följande.

$$\iint_D 1 \, dA = \text{area}(D) \quad (4.21)$$

$$\iint_D f \, dA = \text{volymen under grafen } z = f(x, y), \quad \text{om } f \geq 0 \text{ på } D \quad (4.22)$$

$$\iint_D f \, dA = 0, \quad \text{om } \text{area}(D) = 0 \quad (4.23)$$

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) \, dA = \alpha \iint_D f \, dA + \beta \iint_D g \, dA \quad (\text{linjär operator}) \quad (4.24)$$

$$\iint_D f \, dA \leq \iint_D g \, dA, \quad \text{om } f \leq g \text{ på } D \quad (\text{monoton operator}) \quad (4.25)$$

$$\left| \iint_D f \, dA \right| \leq \iint_D |f| \, dA \quad (\text{triangelolikheten}) \quad (4.26)$$

$$\int_D f \, dA = \int_{D_1} f \, dA + \int_{D_2} f \, dA, \quad \text{om } D = D_1 \cup D_2 \text{ med } D_1 \cap D_2 = \emptyset \quad (4.27)$$

och D_1, D_2 mätbara

Beviset är analogt med beviset av Sats 1.3 i del II. Det bygger på att de undre och övre Riemannsummor har de önskade egenskaperna. Vi upprepar det inte här.

Egenskaperna (4.24) och (4.25) handlar om operatoren $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ som definieras av $T: f \mapsto T(f) = \iint_D f \, dA$ med vektorrummet V av alla integrerbara funktioner. Den är linjär, dvs bevarar linjära kombinationer, och den är monoton, dvs bevarar olikheter.

Det är viktigt att påpeka att vissa "tunna" mängder är mätbara med $\text{area} = 0$, till exempel, en punkt med $\text{area}(P) = 0$ eller en slät kurva med $\text{area}(C) = 0$. Egenskaperna (4.23) och (4.27) ger då att det spelar ingen roll om man inkluderar randen i integrationsområdet. Låt till exempel $R = (a, b) \times (c, d)$ vara en öppen rektangel och $\bar{R} = [a, b] \times [c, d]$ vara en sluten rektangel. Då är $\bar{R} = R \cup \partial R$ med $R \cap \partial R = \emptyset$ och $\text{area}(\partial R) = 0$ och därmed $\iint_{\bar{R}} f \, dA = \iint_R f \, dA$.

4.2 Beräkning av dubbelintegralen

Vi såg i sats 4.2 (Fubinis sats) att dubbelintegralen över en rektangel kan beräknas med två enkelintegraler. Denna metod kan generaliseras till vissa enkla integrationsområden, nämligen de som ligger mellan två grafer. Vi säger att ett sådant område är *enkelt i x* respektive *enkelt i y*.

Område enkelt i y.

Här antar vi att integrationsområdet D ligger mellan de två graferna:

$$y = c(x), \quad x \in [a, b] \quad (4.28)$$

$$y = d(x), \quad x \in [a, b] \quad (4.29)$$

där c, d är kontinuerliga funktioner med $c \leq d$ på $[a, b]$. Det vill säga att D ges av

$$D = \{(x, y) : c(x) \leq y \leq d(x), x \in [a, b]\} \quad (4.30)$$

Vi vet från del II att D är en mätbar mängd med arean

$$\text{area}(D) = \int_a^b (d(x) - c(x)) dx \quad (4.31)$$

Man kan tänka på denna formel som att arean består av smala strimlor med bredden dx och höjden $d(x) - c(x)$. Om f är kontinuerlig är integralen $\iint_D f dA$ definierad enligt definition 4.4. Med ett resonemang som i beviset av Fubinis sats 4.2 får vi

$$\iint_D f dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (4.32)$$

Detta är ett exempel på *skivningsmetoden* från sats 2.5 i del II. Volymen under grafen ges i (4.32) som en summa av volymer av skivor med tjockleken dx och arean $A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (4.33)$$

Område enkelt i x .

Här vänder vi på figuren och antar att D ges av

$$D = \{(x, y) : a(y) \leq x \leq b(y), y \in [c, d]\} \quad (4.34)$$

Vi får då

$$\iint_D f dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (4.35)$$

Integrationsområden som inte är enkla på detta vis kan ofta delas upp i delområden som är enkla i x eller i y .

Exempel 4.3 (Upprepad integration) Vi beräknar $\iint_T f dA$ med $f(x, y) = xy$ och triangeln T med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$.

Triangeln begränsas av de räta linjerna $x = 1$, $y = 0$, och $y = x$. Den är både enkel i x och i y .

(a) Enkel i y : $T = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, x \in [0, 1]\}$.

$$\iint_T f dA = \iint_T xy dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy dy \right) dx \quad (4.36)$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{8} \quad (4.37)$$

(b) Enkel i x : $T = \{(x, y) : y \leq x \leq 1, y \in [0, 1]\}$.

$$\iint_T f \, dA = \iint_T xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy \, dx \right) dy \quad (4.38)$$

$$= \int_0^1 y \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_y^1 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y - y^3) dy = \frac{1}{8} \quad (4.39)$$

Exempel 4.4 (Datorberäkning av integralen) Definition 4.4 lämpar sig bra för datorberäkning. Man skapar en Boolesk funktion som är 1 i integrationsområdet D och 0 utanför D och multiplicerar integranden f med denna funktion. Sedan integrerar man över en lämpligt vald rektangel. Vi visar detta i ett exempel med MATLAB.

Vi beräknar $\iint_T f \, dA$ med $f(x, y) = xy$ och triangeln T med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. Triangeln begränsas av de räta linjerna $x = 1$, $y = 0$ och $y = x$. Vi bildar en Boolesk funktion som beskriver triangeln med hjälp av motsvarande olikheter $x \leq 1$, $0 \leq y$ och $y \leq x$:

```
T=@(x,y) (x<=1) .* (0<=y) .* (y<=x);
```

Sedan integrerar vi den avskurna funktionen över rektangeln $[0, 1] \times [0, 1]$:

```
f=@(x,y) x.*y;
fT=@(x,y) f(x,y) .*T(x,y);
I=integral2(fT,0,1,0,1)
```

Funktionen T är onödigt komplicerad eftersom rektangeln skär av integranden på två sidor:

```
T=@(x,y) (y<=x);
f=@(x,y) x.*y;
fT=@(x,y) f(x,y) .*T(x,y);
I=integral2(fT,0,1,0,1)
```

Definition 4.5 (Sammanhängande mängd) En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas sammanhängande om två godtyckliga punkter i D alltid kan förbindas med en kurva som ligger i D . Med andra ord: D är ej en union av två eller flera disjunkta delmängder.

Sats 4.4 (Medelvärdessatsen för dubbelintegral) Antag att $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en sammanhängande, mätbar, sluten och begränsad mängd och att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på D . Då finns en punkt $(x_0, y_0) \in D$ sådan att

$$\iint_D f \, dA = f(x_0, y_0) \text{area}(D) \quad (4.40)$$

Vi bevisar inte denna sats. Den är analog med sats 1.4 i del II.

Definition 4.6 (Medelvärde av funktion) Medelvärdet av en integrerbar funktion f över mängden D är

$$\frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f \, dA = \frac{\iint_D f \, dA}{\iint_D dA} \quad (4.41)$$

Alternativt kan (4.40) nu formuleras

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f \, dA \quad (4.42)$$

dvs det finns en punkt i D där f är lika med sitt medelvärde över D . En kontinuerlig funktion kan alltså inte hoppa över sitt medelvärde.

4.3 Variabelsubstitution i dubbelintegralen

Vi erinrar oss hur man byter variabel i en enkelintegral, sats 2.1 i del II. Med $x = g(u)$, $a = g(A)$, $b = g(B)$ har vi

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_A^B f(g(u))g'(u) \, du \quad (4.43)$$

(Här har vi låtit x och u byta plats jämfört med sats 2.1 i del II.) Man kan tänka på u som en ny variabel och $x = g(u)$ som en koordinattransformation, varvid integrationsintervallet $[A, B]$ transformeras till $[a, b]$ och differentialen transformeras enligt $dx = g'(u) du$. (Detta förutsätter att $g' > 0$ så att båda integralerna går framåt, vilket inte är nödvändigt för att (4.43) ska gälla. I allmänhet kan vi ha till exempel $B < A$ (baklängesintegral), så att A, B inte bildar ett intervall.)

Vi ska nu studera hur dubbelintegralen transformeras då man byter variabler på liknande sätt. Vi presenterar en härledning som baseras på formell räkning med differentieringar som förhoppningsvis är mer begriplig än en helt rigorös framställning.

Vi antar att variablerna x, y är deriverbara funktioner av de nya variablerna u, v :

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (4.44)$$

och att dessa samband entydigt bestämmer u, v :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (4.45)$$

Med vektorbeteckningar kan vi skriva (4.44) på formen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (4.46)$$

Vi tänker på (4.44) som en koordinattransformation från u, v -planet till x, y -planet och (4.45) som den inversa transformationen. Ett integrationsområde E i u, v -planet transformeras till ett integrationsområde D i x, y -planet. Vi ska nu härleda ett samband mellan areaelementet $du dv$ och areaelementet $dx dy$.

Areaelementet $du dv$ vid punkten (u_0, v_0) begränsas av de räta linjerna $u = u_0, u = u_0 + du, v = v_0, v = v_0 + dv$. Dessa linjer transformeras till kurvor i x, y -planet. Dessa kallas koordinatkurvor och ges av

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0), \quad u \in \mathbb{R} \quad (4.47)$$

respektive

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v), \quad v \in \mathbb{R} \quad (4.48)$$

Kurvorna är på parameterform med parameter u respektive v . Tangentvektorerna i punkten $(x_0, y_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ är

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \text{respektive} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \quad (4.49)$$

och differentialerna $\mathbf{e}_u du$ och $\mathbf{e}_v dv$ transformeras till $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) du$ respektive $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) dv$. Dessa spänner upp en parallelogram, vilken är det transformerade areaelementet. Dess area är normen av kryssprodukten

$$dx dy = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) du \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) dv \right\| \quad (4.50)$$

Kryssprodukten är

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv \mathbf{e}_z \quad (4.51)$$

Här uppträder *Jacobi-determinanten* för transformationen (4.44):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{r}'(u, v)) \quad (4.52)$$

dvs determinanten av Jacobi-matrisen $\mathbf{r}'(u, v)$. (Här använde vi att $\det(A^T) = \det(A)$.)

Sambanden (4.50) och (4.51) ger nu

$$dx \, dy = \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \, dv \mathbf{e}_z \right\| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv = |\det(\mathbf{r}'(u, v))| du \, dv \quad (4.53)$$

Detta är det sökta sambandet mellan areaelementen. Absolutbeloppet av Jacobi-determinanten, dvs $|\det(\mathbf{r}'(u, v))|$, är *ytskalan* vid transformationen.

Vi har nu bevisat följande sats.

Sats 4.5 (Variabelsubstitution i dubbelintegralen) Antag att $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ är en deriverbar och inverterbar variabeltransformation som avbildar mängden E på mängden D . Om $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är integrerbar över D så gäller

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv \quad (4.54)$$

Om vi tillämpar denna formel på envariabelintegralen i (4.43) så får vi istället

$$\int_I f(x) \, dx = \int_J f(g(u)) |g'(u)| \, du \quad (4.55)$$

där båda integralerna går framåt. Om vi tar bort absolutbeloppet från $|g'(u)|$ så kan det hända att en av integralerna går baklänges. Någon motsvarighet till baklängesintegral finns ej i flera variabler.

Syftet med variabelsubstitution är ofta att införa nya koordinater u, v så att integrationsområdet blir enklare, till exempel en rektangel så att Fubinis sats 4.2 kan användas.

Exempel 4.5 (Variabelsubstitution) Vi beräknar $\iint_D \frac{x}{y} \, dx \, dy$ där D är området mellan kurvorna

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{3}{x}, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = 2x \quad (4.56)$$

Vi har

$$\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x}, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \quad (4.57)$$

$$1 \leq xy \leq 3, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2 \quad (4.58)$$

Om vi definierar

$$u = xy \quad (4.59)$$

$$v = \frac{y}{x} \quad (4.60)$$

så betyder detta en rektangel $R = [1, 3] \times [\frac{1}{2}, 2]$ i u, v -planet. Detta är den inversa transformationen. Vi löser ut x, y . Ekvation (4.60) ger $y = vx$, vilket sätts in i (4.59), $u = vx^2$.

Detta leder till $x = \pm\sqrt{u/v} = \sqrt{u/v}$ eftersom $x > 0$. Sedan $y = v\sqrt{u/v} = \sqrt{uv}$. Alltså är transformationen

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \quad (4.61)$$

$$y = \sqrt{uv} \quad (4.62)$$

Vi kan nu räkna ut Jacobi-determinanten:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{-\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v} \quad (4.63)$$

och areaelementet

$$dx \, dy = \frac{1}{2v} \, du \, dv \quad (4.64)$$

(Det visserligen sant att $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1/\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, dvs Jacobi-determinanten för framåttransformationen är 1 genom Jacobi-determinanten för den inversa transformationen, men man behöver ändå invertera för att uttrycka allt i u, v . Här är $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 2\frac{y}{x}$, vilket är $= 2v$, vilket gick lätt i detta fall. Även integranden $\frac{x}{y}$ råkar vara enkel $= \frac{1}{v}$ i detta fall.) Integralen blir

$$\iint_D \frac{x}{y} \, dx \, dy = \iint_R \frac{\sqrt{\frac{u}{v}}}{\sqrt{uv}} \frac{1}{2v} \, du \, dv = \iint_R \frac{1}{v} \frac{1}{2v} \, du \, dv = \iint_R \frac{1}{2v^2} \, du \, dv \quad (4.65)$$

$$= \int_1^3 \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2v^2} \, dv \right) du = \int_1^3 du \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2v^2} \, dv = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \quad (4.66)$$

En viktig variabeltransformation i två variabler ges av polära koordinater.

Exempel 4.6 (Polära koordinater (r, θ)) Vi definierar koordinattransformationen

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta), \end{cases} \quad r \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi) \quad (4.67)$$

Den inversa transformationen ges av

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \text{atan}(y/x), \end{cases} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad (4.68)$$

Koordinaterna (r, θ) kallas polära koordinater till skillnad från (x, y) som kallas Cartesiska. Transformationen (4.67) är inverterbar överallt utom i origo. Jacobi-determinanten

för (4.67) är

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\theta & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r \quad (4.69)$$

och areaelementet blir

$$dx \, dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr \, d\theta = |r| dr \, d\theta = r \, dr \, d\theta \quad (4.70)$$

Vi har alltså

$$dA = dx \, dy = r \, dr \, d\theta \quad (4.71)$$

Exempel 4.7 (Polära koordinater (r, θ)) Vi beräknar volymen under grafen $z = 1 - x^2 - y^2$, $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Volymen är

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) \, dy \right) dx \quad (4.72)$$

Detta leder till svåra räkningar. Genom att gå över till polära koordinater får vi istället:

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \iint_R (1 - r^2) r \, dr \, d\theta \quad (4.73)$$

Här integrerar vi över rektangeln $R = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ i r, θ -planet. Med Fubinis sats 4.2 får vi två enkelintegraler:

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r(1 - r^2) \, d\theta \right) dr = \int_0^1 (r - r^3) dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} \quad (4.74)$$

Enkelt!

4.4 Generaliserad dubbelintegral

Integralen $\iint_D f \, dA$ är definierad om f är kontinuerlig och begränsad och D är mätbar och begränsad. Om någon av f och D är obegränsade säger vi att $\iint_D f \, dA$ är en *generaliserad integral*. En sådan kan vara *konvergent* eller *divergent*.

Om en generaliserad integral har en integrand som inte byter tecken, dvs $f \geq 0$ eller $f \leq 0$ i

D , så är integralen antingen konvergent:

$$\iint_D f \, dA = I \quad (4.75)$$

eller divergerar mot oändligheten:

$$\iint_D f \, dA = +\infty \quad \text{eller} \quad \iint_D f \, dA = -\infty \quad (4.76)$$

Då kan man avgöra om integralen är konvergent eller divergent genom upprepad integration. Vi bevisar inte detta här.

Om integranden har både positiva och negativa värden, så fungerar inte detta: $\int_a^b (\int_c^d f(x, y) \, dy) \, dx$ och $\int_c^d (\int_a^b f(x, y) \, dx) \, dy$ kan ha olika värden. Då måste man använda satsen om absolutkonvergens.

Sats 4.6 (En absolutkonvergent integral är konvergent) Antag att den generaliserade integralen $\iint_D |f| \, dA$ är konvergent. Då är även integralen $\iint_D f \, dA$ konvergent och det gäller att

$$\left| \iint_D f \, dA \right| \leq \iint_D |f| \, dA \quad (4.77)$$

Integralen $\iint_D f \, dA$ kallas då absolutkonvergent.

Vi genomför inte beviset. Obs att konvergensen för $\iint_D |f| \, dA$ kan avgöras med upprepad integration eftersom $|f| \geq 0$ på D .

Exempel 4.8 (Generaliserad integral) Vi undersöker $\iint_D f \, dA$ med $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$ och $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$. Området D är begränsat men f är obegränsad: $f(x, y) \rightarrow \infty$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Alltså är integralen generaliserad, men integranden är positiv så att vi kan använda upprepad integration för att undersöka konvergens eller divergens. Vi har

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} \, dy \right) \, dx \quad (4.78)$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{(x+y)} \right]_{y=0}^{y=x^2} \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2} \right) \, dx \quad (4.79)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 = \ln(2) \quad (4.80)$$

Vi drar slutsatsen att integralen är konvergent. Eftersom den yttre integralen är en generaliserad enkelintegral, så borde vi räkna så här:

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} \, dy \right) \, dx \quad (4.81)$$

Det kan vara intressant att pröva att integrera i den andra ordningen:

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{(x+y)^2} dx \right) dy \quad (4.82)$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{(x+y)} \right]_{x=\sqrt{y}}^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y}+y} - \frac{1}{1+y} \right) dy \quad (4.83)$$

Med substitutionen $s = \sqrt{y}$ i den första integralen får vi $ds = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$ och

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}+y} dy = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+s} ds = 2 \ln(2) \quad (4.84)$$

Den andra integralen är $-\int_0^1 \frac{1}{1+y} dy = -\ln(2)$. Resultatet blir $\ln(2)$ som förut.

Exempel 4.9 (Generaliserad integral) Vi beräknar den generaliserade integralen $\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dx dy$. Positiv integrand, upprepad integration är tillåten:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - y^2) dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \end{aligned} \quad (4.85)$$

Här kommer vi inte längre för vi känner ingen primitiv funktion till $\exp(-x^2)$. Då går vi över till polära koordinater:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dx dy = \iint_E \exp(-r^2) r dr d\theta \quad (4.86)$$

med den obegränsade strimlan $E = [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ i r, θ -planet. Men integranden är positiv och vi använder Fubinis sats 4.2 på rektangeln $E_R = [0, R] \times [0, 2\pi]$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{E_R} \exp(-r^2) r dr d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \exp(-r^2) r dr \right) d\theta \quad (4.87)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \exp(-r^2) r dr \quad (4.88)$$

$$= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \exp(-r^2) \right]_0^R = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - \exp(-R^2)) = \pi \quad (4.89)$$

Alltså:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dx dy = \pi \quad (4.90)$$

Med hjälp av (4.85) får vi nu även

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \quad (4.91)$$

4.5 Trippelintegralen

Vi ska nu definiera integralen av en funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ av tre variabler över ett rätblock $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$. Den tecknas

$$\iiint_R f \, dV = \iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (4.92)$$

och kallas även *trippelintegral*. Symbolen $dV = dx \, dy \, dz$ kallas *volymselement*. Konstruktionen följer samma steg som för enkel- och dubbelintegralen och vi upprepar inte alla detaljer.

En partition av $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ är en mängd av punkter $P = \{(x_i, y_j, z_k) \in \mathbb{R}^3 : i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m, k = 0, \dots, p\}$ sådana att

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_m = d \\ e &= z_0 < z_1 < \dots < z_{k-1} < z_k < \dots < z_p = g \end{aligned} \quad (4.93)$$

för $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p$. P delar in R i delrätblock $R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ med steglängder $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, för $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p$. Den maximala diametern av delrätblocken betecknas $h = \max_{i,j,k} \text{diam}(R_{ijk})$.

Vi säger att $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är integrerbar över R om det finns ett unikt tal som ligger mellan de undre och övre Riemann-summorna för alla partitioner. Det talet är då integralen $\iiint_R f \, dV$. Analogt med sats 4.1 har vi att kontinuerliga funktioner är integrerbara och Riemann-summorna konvergerar mot integralen:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j, \tilde{z}_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \rightarrow \iiint_R f \, dV \quad \text{då } h = \max_{i,j,k} \text{diam}(R_{ijk}) \rightarrow 0 \quad (4.94)$$

med godtyckliga evalueringspunkter $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j, \tilde{z}_k) \in R_{ijk}$.

Fubinis sats för trippelintegral säger att

$$\iiint_R f \, dV = \int_e^g \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz \quad (4.95)$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^g f(x, y, z) \, dz \right) dx \right) dy \quad (4.96)$$

$$= \int_a^b \left(\int_e^g \left(\int_c^d f(x, y, z) \, dy \right) dz \right) dx \quad (4.97)$$

För att integrera över en mer allmän mängd $D \subseteq \mathbb{R}^3$ måste vi antaga att D är begränsad och mätbar, dvs att volymen $\text{vol}(D)$ är definierad. Sedan väljer vi ett stort rätblock R sådant att $D \subseteq R$ och integrerar den avskurna funktionen över R som i definition 4.4. På så vis kan man integrera begränsade och kontinuerliga funktioner över begränsade och mätbara mängder.

Om integranden f är obegränsad eller området D är obegränsat så har vi en generaliserad trippelintegral. En sådan behandlas på samma vis som generaliserad dubbelintegral. Vi genomför inte det här.

Sats 4.7 (Trippelintegralens egenskaper) Låt $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vara integrerbara på mängden $D \subseteq \mathbb{R}^3$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Då gäller följande.

$$\iiint_D 1 \, dV = \text{vol}(D) \quad (4.98)$$

$$\iiint_D f \, dV = 0, \quad \text{om } \text{vol}(D) = 0 \quad (4.99)$$

$$\iiint_D (\alpha f + \beta g) \, dV = \alpha \iiint_D f \, dV + \beta \iiint_D g \, dV \quad (\text{linjär operator}) \quad (4.100)$$

$$\iiint_D f \, dV \leq \iiint_D g \, dV, \quad \text{om } f \leq g \text{ på } D \quad (\text{monoton operator}) \quad (4.101)$$

$$\left| \iiint_D f \, dV \right| \leq \iiint_D |f| \, dV \quad (\text{triangelolikheten}) \quad (4.102)$$

$$\int_D f \, dV = \int_{D_1} f \, dV + \int_{D_2} f \, dV, \quad \text{om } D = D_1 \cup D_2 \text{ med } D_1 \cap D_2 = \emptyset \quad (4.103)$$

och D_1, D_2 mätbara

Beviset är analogt med beviset av Sats 1.3 i del II. Det bygger på att de undre och övre Riemannsummorna har de önskade egenskaperna. Vi upprepar det inte här. Vissa "tunna" mängder är mätbara med volym = 0, till exempel, en punkt med $\text{vol}(P) = 0$, en slät kurva med $\text{vol}(C) = 0$ eller en slät yta med $\text{vol}(S) = 0$.

Liksom för dubbelintegralen kan Fubinis sats generaliseras från rätblock till vissa enkla integrationsområden. Det leder till upprepad integration. Till exempel:

Område enkelt i z .

Här antar vi att D är området mellan två grafer

$$z = e(x, y), \quad (x, y) \in E \quad (4.104)$$

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in E \quad (4.105)$$

där e, g är kontinuerliga funktioner med $e \leq g$ på $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Det vill säga att D ges av

$$D = \{(x, y, z) : e(x, y) \leq z \leq g(x, y), (x, y) \in E\} \quad (4.106)$$

Vi vet från egenskapen (4.22) i sats 4.3 att D är en mätbar mängd med volymen

$$\text{vol}(D) = \iint_E (g(x, y) - e(x, y)) \, dx \, dy \quad (4.107)$$

Om f är kontinuerlig och begränsad, så är integralen $\iiint_D f \, dV$ definierad. Med ett resonemang som i beviset av Fubinis sats 4.2 får vi

$$\iiint_D f \, dV = \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_E \left(\int_{e(x, y)}^{g(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) \, dx \, dy \quad (4.108)$$

Dubbelintegralen över E beräknas med metoder från avsnitt 4.2.

På liknande vis kan man integrera över områden som är enkla i x eller y .

Exempel 4.10 (Volymen av tetraeder) Vi beräknar volymen av tetraedern D med hörn i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Tetraedern är enkel i alla riktningar x , y och z . Enkel i z : mellan graferna

$$z = 0, \quad (x, y) \in T \quad (4.109)$$

$$z = 1 - x - y, \quad (x, y) \in T \quad (4.110)$$

där T är triangeln i x, y -planet med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Upprepad integration enligt (4.108) ger nu

$$\text{vol}(D) = \iiint_D dV = \int_T \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dx dy = \int_T (1 - x - y) dx dy \quad (4.111)$$

Triangeln T är enkel i y :

$$\text{vol}(D) = \int_T (1 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx \quad (4.112)$$

$$= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \dots = \frac{1}{6} \quad (4.113)$$

Skivningsmetoden.

Ibland kan man använda "skivningsmetoden". Den leder också till upprepad integration. Om, till exempel, D är av formen

$$D = \{(x, y, z) : (y, z) \in E(x), a \leq x \leq b\} \quad (4.114)$$

med en mätbar mängd $E(x)$ i y, z -planet, så har vi

$$\iiint_D f dV = \int_a^b \left(\iint_{E(x)} f(x, y, z) dy dz \right) dx \quad (4.115)$$

Dubbelintegralen över $E(x)$ beräknas med metoder från avsnitt 4.2. Man kan tänka på denna formel som att man har delat upp integralen i skivor med tjocklek dx som är ortogonala mot x -axeln.

Exempel 4.11 (Volymen av tetraeder, skivningsmetoden) Vi beräknar volymen av tetraedern D med hörn i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Tetraedern kan skivas ortogonalt mot alla riktningar x , y och z . Ortogonalt mot x -axeln:

$$\text{vol}(D) = \iiint_D dV = \int_0^1 \left(\iint_{T(x)} dy dz \right) dx \quad (4.116)$$

där $T(x)$ är tvärsnittet av tetraedern vid x . Det är en triangel med hörn i $(x, 0, 0)$, $(x, 1 - x, 0)$, $(x, 0, 1 - x)$. För fixt x tänker vi oss den som en triangel i y, z -planet med hörn i $(0, 0)$, $(1 - x, 0)$, $(0, 1 - x)$. Den är enkel i z :

$$\text{vol}(D) = \int_0^1 \left(\iint_{T(x)} dy dz \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{6} \quad (4.117)$$

Vi har varit noggranna med att skriva ut parenteser kring de upprepade integralerna så att det inte ska råda någon tvekan om i vilken ordning de ska räknas ut. Ofta låter man ordningen vara underskörd. Till exempel, skulle man kunna skriva integralen i (4.117) som

$$\int_0^1 \iint_{T(x)} dy dz dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx \quad (4.118)$$

Detta kan vara svårtolkat. En del författare skriver

$$\int_0^1 dx \iint_{T(x)} dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \quad (4.119)$$

Vi tar ett exempel till.

Exempel 4.12 (Trippelintegral, upprepad integration) Vi beräknar integralen $\iiint_D f dV$ med $f(x, y, z) = x$ och området D som ligger i första oktanten och under paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$.

Området beskrivs av olikheterna $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$. Det är enkelt i z , det ligger mellan graferna:

$$z = 0, \quad (x, y) \in A \quad (4.120)$$

och

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad (x, y) \in A \quad (4.121)$$

med kvartscirkelskivan $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$. Vi får

$$\iiint_D f dV = \iiint_D x dx dy dz = \iint_A \left(\int_0^{4-x^2-y^2} x dz \right) dx dy \quad (4.122)$$

$$= \iint_A \left(x \left[z \right]_{z=0}^{4-x^2-y^2} \right) dx dy = \iint_A x(4 - x^2 - y^2) dx dy \quad (4.123)$$

Med polära koordinater transformeras A till en rektangel $R = [0, 2] \times [0, \pi/2]$. Vi får

$$\iiint_D f dV = \iint_A \left(x(4 - x^2 - y^2) \right) dx dy = \iint_R \left(r \cos(\theta)(4 - r^2) \right) r dr d\theta \quad (4.124)$$

$$= \int_0^2 (4r^2 - r^4) dr \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta = \frac{64}{15} \cdot 1 = \frac{64}{15} \quad (4.125)$$

Alternativt kan vi använda att A är enkelt i y :

$$\iiint_D f \, dV = \iint_A \left(x(4 - x^2 - y^2) \right) dx \, dy \quad (4.126)$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x(4 - x^2 - y^2) \, dy \right) dx \quad (4.127)$$

$$= \int_0^2 x \left[4y - x^2y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (4.128)$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 2x(4 - x^2)^{3/2} dx \quad (4.129)$$

$$= \frac{1}{3} \left[-\frac{2}{5}(4 - x^2)^{5/2} \right]_0^2 = \frac{2}{15} 4^{5/2} = \frac{64}{15} \quad (4.130)$$

Skivning:

$$\iiint_D f \, dV = \int_0^4 \left(\iint_{A(z)} x \, dx \, dy \right) dz = \int_0^4 \left(\iint_{R(z)} r \cos(\theta) r \, dr \, d\theta \right) dz \quad (4.131)$$

$$= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{4-z}} r^2 \, dr \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta \right) dz = \frac{1}{3} \int_0^4 (4 - z)^{3/2} dz \quad (4.132)$$

$$= \frac{1}{3} \left[-\frac{2}{5}(4 - z)^{5/2} \right]_0^4 = \frac{64}{15} \quad (4.133)$$

Exempel 4.13 (Trippelintegral, datorberäkning) Vi beräknar integralen från exempel 4.12 med MATLAB.

```
xmin = 0; xmax = 2;
ymin = 0; ymax = @(x) sqrt(4 - x.^2);
zmin = 0; zmax = @(x,y) 4 - x.^2 - y.^2;
f=@(x,y,z) x;
I=integral3(f,xmin,xmax,ymin,ymax,zmin,zmax)
Iexact=64/15
```

Alternativ:

```
ff=@(x,y,z) (x.*( z<= 4-x.^2-y.^2 ) );
II=triplequad(ff,0,2,0,2,0,4)
```

4.6 Variabelsubstitution i trippelintegralen

Vi ska nu se hur trippelintegralen transformeras när man byter variabler. Härledningen följer samma steg som för dubbelintegralen i avsnitt 4.3.

Vi antar att variablerna x, y, z är deriverbara funktioner av de nya variablerna u, v, w :

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad (4.134)$$

och att dessa samband entydigt bestämmer u, v, w genom den inversa transformationen:

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases} \quad (4.135)$$

Med vektorbeteckningar kan vi skriva (4.134) på formen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w) \quad (4.136)$$

Ett integrationsområde E i u, v, w -rummet transformeras till ett integrationsområde D i x, y, z -rummet. Vi ska nu härleda ett samband mellan volymselementet $du dv dw$ och volymselementet $dx dy dz$.

Volymselementet $du dv dw$ vid punkten (u_0, v_0, w_0) begränsas av de räta linjerna $u = u_0, u = u_0 + du, v = v_0, v = v_0 + dv, w = w_0, w = w_0 + dw$. Dessa linjer transformeras till kurvor i x, y, z -rummet. Dessa kallas koordinatkurvor och ges av

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0, w_0), \quad u \in \mathbb{R} \quad (4.137)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v, w_0), \quad v \in \mathbb{R} \quad (4.138)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0, w), \quad w \in \mathbb{R} \quad (4.139)$$

Kurvorna är på parameterform med parametrarna u, v respektive w . Tangentvektorerna i punkten $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0, w_0)$ är

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) \quad \text{respektive} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \quad (4.140)$$

och differentialerna $e_u du, e_v dv$ och $e_w dw$ transformeras till

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) du, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) dv \quad \text{respektive} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) dw \quad (4.141)$$

Dessa spänner upp en parallelepiped, vilken är det transformerade areaelementet. Dess area är absolutbeloppet av den skalära trippelprodukten

$$dx dy dz = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) du \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) dv \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) dw \right) \right| \quad (4.142)$$

Trippelprodukten ges av determinanten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw \right) \\ = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial z}{\partial u} du \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ \frac{\partial x}{\partial w} dw & \frac{\partial y}{\partial w} dw & \frac{\partial z}{\partial w} dw \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} du dv dw \end{aligned} \quad (4.143)$$

Här uppträder *Jacobi-determinanten* för transformationen (4.134):

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{r}'(u, v, w)) \quad (4.144)$$

dvs determinanten av Jacobi-matrisen $\mathbf{r}'(u, v, w)$. (Här använde vi att $\det(A^T) = \det(A)$.)

Sambanden (4.142) och (4.143) ger nu

$$dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw = |\det(\mathbf{r}'(u, v, w))| du dv dw \quad (4.145)$$

Detta är det sökta sambandet mellan volymselementen. Absolutbeloppet av Jacobi-determinanten, dvs $|\det(\mathbf{r}'(u, v, w))|$, är *volymskalnan* vid transformationen.

Vi har nu bevisat följande sats.

Sats 4.8 (Variabelsubstitution i trippelintegralen) Antag att $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ är en deriverbar och inverterbar variabeltransformation som avbildar mängden E på mängden D . Om $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är integrerbar över D så gäller

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ = \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \end{aligned} \quad (4.146)$$

De viktigaste koordinattransformationerna i rummet är *cylindriska koordinater* och *sfäriska koordinater*.

Exempel 4.14 (Cylindriska koordinater (r, θ, z)) Vi definierar koordinattransformationen

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta), \\ z = z \end{cases} \quad r \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R} \quad (4.147)$$

Den inversa transformationen ges av (obs att $\tan(\theta) = y/x$)

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \text{atan}(y/x), \\ z = z, \end{cases} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0 \quad (4.148)$$

Koordinaterna (r, θ, z) kallas cylindriska koordinater till skillnad från (x, y, z) som kallas Cartesiska. Transformationen (4.147) är inverterbar överallt utom på z -axeln. Jacobi-determinanten för (4.147) är

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \\ &= \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r \end{aligned} \quad (4.149)$$

och volymselementet blir

$$dV = dx dy dz = r dr d\theta dz \quad (4.150)$$

Exempel 4.15 (Trippelintegral, cylindriska koordinater) Vi beräknar integralen från exempel 4.12. Vi har $\iiint_D f dV$ med $f(x, y, z) = x$ och området $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, (x, y) \in A\}$ där $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$. Vi går över till cylinderkoordinater och får området E som bestäms av olikheterna $0 \leq z \leq 4 - r^2, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/2$. Integralen blir

$$\iiint_D x dx dy dz = \iiint_E r \cos(\theta) r dr d\theta dz \quad (4.151)$$

Vi använder skivningsmetoden med skivor med tjocklek $d\theta$ och tvärsnitt B som ges av $0 \leq$

$z \leq 4 - r^2, 0 \leq r \leq 2$. Vi får

$$\iiint_E \cos(\theta) r^2 \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^{\pi/2} \left(\iint_B \cos(\theta) r^2 \, dr \, dz \right) d\theta \quad (4.152)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta \iint_B r^2 \, dr \, dz \quad (4.153)$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{4-r^2} r^2 \, dz \right) dr \quad (4.154)$$

$$= \int_0^2 (4 - r^2) r^2 \, dr = \frac{64}{15} \quad (4.155)$$

Alternativt kan vi använda att E är enkelt i z : $0 \leq z \leq 4 - r^2$ för (r, θ) i rektangeln $R = [0, 2] \times [0, \pi/2]$ så att

$$\iiint_E \cos(\theta) r^2 \, dr \, d\theta \, dz = \iint_R \left(\int_0^{4-r^2} r^2 \cos(\theta) \, dz \right) dr \, d\theta \quad (4.156)$$

$$= \iint_R (4 - r^2) r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \quad (4.157)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r^2 \, dr = \frac{64}{15} \quad (4.158)$$

Exempel 4.16 (Sfäriska koordinater (ρ, ϕ, θ)) Vi definierar koordinattransformationen

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta), \\ y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases} \quad \rho \in [0, \infty), \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi) \quad (4.159)$$

Observera att $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin(\phi)$, $\cot(\phi) = z/r$, $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ och $\tan(\theta) = y/x$. Den inversa transformationen ges av

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \phi = \operatorname{acot}(z/\sqrt{x^2 + y^2}), \quad \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0 \\ \theta = \operatorname{atan}(y/x), \end{cases} \quad (4.160)$$

Koordinaterna (ρ, ϕ, θ) kallas sfäriska koordinater till skillnad från (x, y, z) som kallas Cartesiska. Transformationen (4.159) är inverterbar överallt utom på z -axeln. Jacobi-

determinanten för (4.159) är

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} \\ &= \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x'_\phi & y'_\phi & z'_\phi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \\ \rho \cos(\phi) \cos(\theta) & \rho \cos(\phi) \sin(\theta) & -\rho \sin(\phi) \\ -\rho \sin(\phi) \sin(\theta) & \rho \sin(\phi) \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \quad (4.161) \\ &= \dots = \rho^2 \sin(\phi) \end{aligned}$$

Eftersom $\sin(\phi) \geq 0$ för $\phi \in [0, \pi]$ blir volymselementet

$$dV = dx dy dz = \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \quad (4.162)$$

Exempel 4.17 (Trippelintegral, sfäriska koordinater) Vi beräknar $\iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz$ med $B = B((0, 0, 0), R)$, ett klot med radie R . Med sfäriska koordinater får vi $E = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ och

$$\iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz \quad (4.163)$$

$$= \iiint_E \left((\rho \sin(\phi) \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\phi) \sin(\theta))^2 \right) \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \quad (4.164)$$

$$= \iiint_E \sin^3(\phi) \rho^4 d\rho d\phi d\theta \quad (4.165)$$

$$= \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \quad (4.166)$$

$$= \frac{1}{5} R^5 \int_{-1}^1 (1 - u^2) du 2\pi = \frac{1}{5} R^5 \frac{4}{3} 2\pi = \frac{8\pi}{15} R^5 \quad (4.167)$$

där vi använt substitutionen $u = -\cos(\theta)$ så att $\sin^3(\phi) d\phi = (1 - \cos^2(\phi)) \sin(\phi) d\phi = (1 - u^2) du$.

4.7 Medelvärden, moment

Definition 4.7 (Medelvärde med vikt) Låt w vara en kontinuerlig och positiv funktion på mängden $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Medelvärdet med vikten w av en integrerbar funktion f över mängden D är

$$\bar{f} = \frac{\iiint_D f w dV}{\iiint_D w dV} = \frac{\iiint_D f(x, y, z) w(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D w(x, y, z) dx dy dz} \quad (4.168)$$

Funktionen w kallas viktfunktion.

Viktfunktionen w är ofta konstant, t ex $w = 1$. Då kan man förkorta bort w och vi får ett vanligt medelvärde

$$\bar{f} = \frac{\iiint_D f \, dV}{\iiint_D dV} = \frac{1}{\text{vol}(D)} \iiint_D f \, dV \quad (4.169)$$

Sats 4.9 (Medelvärdessatsen med vikt) Antag att $D \subseteq \mathbb{R}^3$ är en sammanhängande, mätbar, sluten och begränsad mängd med positiv och kontinuerlig viktfunktion w och att $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på D . Då finns en punkt $(x_0, y_0, z_0) \in D$ sådan att

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\iiint_D f w \, dV}{\iiint_D w \, dV} \quad (4.170)$$

Med andra ord: det finns en punkt i D där f är lika med sitt medelvärde.

Vi bevisar inte denna sats. Se även sats 4.4.

Betydelsen av att använda viktfunktion illustreras av nästa exempel.

Exempel 4.18 (Massa och masscentrum) Antag att en kropp uppfyller området $D \subseteq \mathbb{R}^3$ och har en kontinuerligt varierande masstäthet (densitet) d [kg/m^3]. Kroppens totala massa ges av

$$M = \iiint_D d \, dV = \iiint_D d(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_D dm \quad [\text{kg}] \quad (4.171)$$

där vi infört beteckningen $dm = d \, dV$, masselementet. Densiteten är ofta konstant, men det är ändå nödvändigt att införa den i integralen för att enheterna ska bli korrekta.

Om vi bildar medelvärdet av koordinaten x med avseende på vikten d , så får vi

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x \, dm}{\iiint_D dm} = \frac{\iiint_D x \, dV}{\iiint_D d \, dV} \quad [\text{m}] \quad (4.172)$$

På samma vis kan vi bilda medelvärdet av koordinaterna y och z . Med Ortsvektorn $\mathbf{r} = (x, y, z)$ får vi då

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\iiint_D \mathbf{r} \, dm}{\iiint_D dm} = \frac{\iiint_D \mathbf{r} \, dV}{\iiint_D d \, dV} = \frac{1}{M} \iiint_D (x, y, z) \, d(x, y, z) \, dV \quad [\text{m}] \quad (4.173)$$

Enligt medelvärdessatsen med vikt finns det en punkt $(x_0, y_0, z_0) \in D$ sådan att $(x_0, y_0, z_0) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Denna punkt kallas kroppens *masscentrum* eller *tyngdpunkt*. Den ges av (4.173).

Exempel 4.19 (Tröghetsmoment) Låt D vara en kropp med densiteten d och låt l vara en axel (rät linje) i rummet. Avståndet från en punkt $(x, y, z) \in D$ till axeln betecknar vi med $R(x, y, z)$. Tröghetsmomentet för kroppen D med avseende på axeln l är

$$I = \iiint_D R^2 dm = \iiint_D R^2 dV \quad [\text{kg m}^2] \quad (4.174)$$

Till exempel är tröghetsmomentet med avseende på z -axeln

$$I = \iiint_D (x^2 + y^2) dm = \iiint_D (x^2 + y^2) dV \quad [\text{kg m}^2] \quad (4.175)$$

Exempel 4.20 (Tröghetsmoment för ett klot) Vi beräknar tröghetsmomentet med avseende på z -axeln för ett klot B med centrum i origo och radie R [m] och med konstant densitet d [kg/m^3].

Med sfäriska koordinater i (4.175) får vi $E = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ och

$$I = \iiint_B (x^2 + y^2) dm = \iiint_B (x^2 + y^2) d dx dy dz \quad (4.176)$$

$$= d \iiint_E (\rho \sin(\phi))^2 \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \quad (4.177)$$

$$= d \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \quad (4.178)$$

$$= d \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} 2\pi = \frac{8\pi}{15} dR^5 \quad [\text{kg m}^2] \quad (4.179)$$

där vi använt substitutionen $u = -\cos(\theta)$ så att

$$\int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi = \int_0^\pi (1 - \cos^2(\phi)) \sin(\phi) d\phi = \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \frac{4}{3} \quad (4.180)$$

4.8 Övningar

4.1 Dubbelintegralen

Övning 4.1 Skriv ned en Riemann-summa för $\iint_R f \, dA$ med $f(x, y) = xy$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$ och en partition med 4×4 delrektanglar.

Övning 4.2 Beräkna $\iint_R f \, dA$.

(a) $f(x, y) = xy$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$ (b) $f(x, y) = \sqrt{x+y}$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

(c) $f(x, y) = x^2 \sin(y)$, $R = [0, 1] \times [0, \pi]$ (d) $f(x, y) = (x+y)^{-2}$, $R = [1, 2] \times [1, 2]$

4.2 Beräkning av dubbelintegralen

Övning 4.3 Beräkna $\iint_D f \, dA$.

(a) $f(x, y) = y^2$, $D = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1, -y - 2 \leq x \leq y\}$

(b) $f(x, y) = \frac{y}{1+x^5}$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

(c) $f(x, y) = x$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin(x)\}$

(d) $f(x, y) = x^3$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln(x)\}$

Övning 4.4 Beräkna $\iint_D f \, dA$ med $f(x, y) = xy$ och D som begränsas av kurvorna $y = x - 1$ och $y^2 = 2x + 6$.

Övning 4.5 Beräkna volymen under grafen $z = xy$ över triangeln med hörn i $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(1, 2)$.

Övning 4.6 Rita integrationsområdet och ändra integrationsordningen.

(a) $\int_0^1 \left(\int_0^y f(x, y) \, dx \right) dy$

(b) $\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$

Övning 4.7 Beräkna integralerna genom att byta integrationsordning.

(a) $\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 \exp(x^2) \, dx \right) dy$

(b) $\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} \, dy \right) dx$

4.3 Variabelsubstitution i dubbelintegralen

Övning 4.8 Beräkna $\iint_D (3x + 4y^2) dx dy$ med området D som ligger i övre halvplanet och begränsas av cirkklarna $x^2 + y^2 = 1$ och $x^2 + y^2 = 4$.

Övning 4.9 Beräkna $\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2} dx dy$ med området D som ligger mellan två cirklar med centrum i origo och radie a respektive b .

Övning 4.10 Beräkna $\iint_D f dA$ med $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ och cirkelskivan D med centrum i $(0, 1)$ och radie 1.

Övning 4.11 Beräkna $\iint_D \frac{y}{x-2y} dx dy$ med området $D = \{(x, y) : 0 < x+y < 3, 1 < x-2y < 4\}$.

Övning 4.12 Beräkna arean av området i första kvadranten som begränsas av kurvorna $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2/x^2$, $y = 4/x^2$.

4.4 Generaliserad dubbelintegral

Övning 4.13 Är integralen konvergent? Beräkna i så fall integralen.

(a) $\iint_D x \exp(-x^2 - y^2) dx dy$, $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$

(b) $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$

4.5 Trippelintegralen

Övning 4.14 Beräkna $\iiint_D f dV$.

(a) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $D = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$

(b) $f(x, y, z) = z$, $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$

(c) $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2+z^2}$, $D = \{(x, y, z) : 1 \leq y \leq 4, y \leq z \leq 4, 0 \leq x \leq z\}$

Övning 4.15 Beräkna $\iiint_D f dV$ med $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ och D som begränsas av paraboloiden $y = x^2 + z^2$ och planet $y = 4$.

4.6 Variabelsubstitution i trippelintegralen

Övning 4.16 Beräkna volymen av ett klot med radien R .

Övning 4.17 Beräkna volymen av området i första oktanten som begränsas av ytorna $xy = 1$, $xy = 9$, $xz = 4$, $xz = 36$, $yz = 25$, och $yz = 49$.

Övning 4.18 Beräkna $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$ där D är området som ligger innanför sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Övning 4.19 Beräkna $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ där D är området som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$, nedanför planet $z = 4$ och ovanför paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$.

Övning 4.20 Beräkna volymen av området som ligger ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och nedanför sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Övning 4.21 Beräkna $\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$ där D är området mellan sfärerna $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Övning 4.22 Beräkna $\iiint_D x \exp(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ där D är området i första oktanten och innanför sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4.7 Medelvärden, moment

Övning 4.23 Beräkna massan och masscentrum för kuben $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ med densiteten $d(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)/a^2$. Vilka enheter har konstanterna a och k ?

Övning 4.24 Beräkna tröghetsmomentet med avseende på z -axeln för cylindern $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h$ med konstant densitet d .

Övning 4.25 Kuben K har sidan L och konstant densitet d . Den har ett hörn i origo och tre kanter längs koordinataxlarna. Beräkna dess tröghetsmoment med avseende på de tre koordinataxlarna.

4.9 Problem

4.1 Dubbelintegralen

Problem 4.1 En kvadratisk platta med sidan L [m] är belagd med massa med masstätheten $\delta(x, y) = k(x/L)^2 / ((y/L)^2 + 3)$ där k [kg/m²] är konstant. Beräkna totala massan.

Problem 4.2 Antag att $m \leq f \leq M$ i D . Visa att

$$m \operatorname{area}(D) \leq \iint_D f \, dA \leq M \operatorname{area}(D)$$

4.2 Beräkning av dubbelintegralen

Problem 4.3 Beskriv den kropp vars volym ges av integralen

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \right) dx$$

4.3 Variabelsubstitution i dubbelintegralen

4.4 Generaliserad dubbelintegral

4.5 Trippelintegralen

4.6 Variabelsubstitution i trippelintegralen

4.7 Medelvärden, moment

5. Kurv- och ytintegraler

5.1	Kurvor	115
5.2	Kurvintegraler	120
5.3	Ytor	125
5.4	Ytintegraler	127
5.5	Gräd, div, rot	132
5.6	Gauss divergenssats	135
5.7	Övningar	139
5.8	Problem	140

Vi integrerar över kurvor och ytor i rummet. Efter att ha parametriserat kurvor och ytor kan vi definiera kurvintegraler och ytintegraler på ett sätt som liknar hur vi gjorde variabelsubstitution i dubbelintegralen.

5.1 Kurvor

Definition 5.1 (Kurva på parameterform) En kurva C är en punktmängd i rummet som kan parametriseras med en kontinuerlig funktion $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in I \tag{5.1}$$

det vill säga, med $\mathbf{r} = (x, y, z)$,

$$C: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in I \tag{5.2}$$

där I är ett intervall. Variabeln t kallas *parameter*. Vi antar vidare att \mathbf{r} är deriverbar med kontinuerlig derivata.

En kurva $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ kallas *sluten* om $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. En kurva kallas *enkel* om den inte korsar sig själv.

Kurvor kan beskrivas på diverse sätt men det är nödvändigt att parametrisera dem som i (5.1) för att kunna göra beräkningar med kurvor. Villkoret att \mathbf{r} är kontinuerlig garanterar att kurvan hänger ihop. Villkoret att \mathbf{r} är deriverbar behövs för att utesluta irreguljära kurvor som inte tillåter den slags matematisk analys som vi ska göra, t ex fraktal kurva.

Man kan tänka på $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ som läget vid tiden t för en partikel som rör sig längs kurvan. Då blir *medelhastigheten* för partikeln över tidsintervallet $[t, t + \Delta t]$:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (5.3)$$

Om vi låter $\Delta t \rightarrow 0$ får vi den momentana *hastigheten* vid tiden t :

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) \quad (5.4)$$

Ibland tecknas tidsderivatan med prick: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$. Hastigheten är en vektorkvantitet. Dess norm kallas *fart*:

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| \quad (5.5)$$

Den andra derivatan av $\mathbf{r}(t)$ kallas *acceleration*:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) \quad (5.6)$$

Om $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, så är den geometriska tolkningen att $\mathbf{r}'(t)$ är en *tangentvektor* till kurvan C i punkten $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) \quad (5.7)$$

Vi kan då normera tangentvektorn och bilda *enhetstangentvektorn*:

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{T}(t)}{\|\mathbf{T}(t)\|} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad (5.8)$$

En kurva kallas *slät* (eller *glatt*) i en punkt om den har en tangentvektor i punkten.

Den enklaste (och därmed den viktigaste) kurvan är den räta linjen.

Exempel 5.1 (Räta linjen) Den räta linjen genom punkten P_0 med Ortsvektorn \mathbf{r}_0 och riktningsvektorn \mathbf{v} kan parametriseras som

$$L: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.9)$$

det vill säga

$$L: \begin{cases} x = x_0 + tv_x, \\ y = y_0 + tv_y, \\ z = z_0 + tv_z, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

Vi deriverar och får hastigheten

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v} \quad (5.11)$$

Hastigheten är konstant och accelerationen är $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$.

Linjen kan parametriseras på många sätt. Till exempel:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s^3\mathbf{v}, \quad s \in \mathbb{R} \quad (5.12)$$

Nu får vi $\mathbf{r}'(s) = 3s^2\mathbf{v}$ och $\mathbf{a}(s) = 6s\mathbf{v}$. Observera att nu är $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$ men linjen är ändå slät.

Den räta linjen är viktig bland annat för att den kan approximera en allmän kurva.

Exempel 5.2 (Tangentlinje) Låt

$$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b] \quad (5.13)$$

vara en slät kurva. Låt P_0 med Ortsvektor $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ vara en punkt på kurvan med $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Linjäriseringen av \mathbf{r} i t_0 är

$$\mathbf{L}_{t_0}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) \quad (5.14)$$

Eftersom $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, definierar detta en rät linje:

$$L: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.15)$$

Den kallas tangentlinjen till C i punkten P_0 . Det är en rät linje som approximerar den krökta kurvan nära P_0 . Tangentvektorn $\mathbf{r}'(t_0)$ är dess riktningvektor och tangentlinjen kan även parametriseras som

$$L: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'(t_0)t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.16)$$

Exempel 5.3 (Spets) Vi betraktar nu kurvan

$$C: \begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.17)$$

Här har vi

$$\mathbf{r} = t^3\mathbf{e}_x + t^2\mathbf{e}_y \quad (5.18)$$

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{e}_x + 2t\mathbf{e}_y \quad (5.19)$$

Vi eliminerar t : $t = x^{1/3}$, $y = t^2 = x^{2/3}$. Kurvan är en graf:

$$y = x^{2/3}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.20)$$

Derivatan $y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ går mot $-\infty$ då $x \rightarrow 0-$ (från vänster) och går mot ∞ då $x \rightarrow 0+$ (från höger). Kurvan har alltså en spets i origo, dvs den har ingen tangent i origo. Trots att parametriseringen (5.17) är deriverbar, så är kurvan inte slät i origo. Observera att $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$. Partikeln saktar in och vänder i origo.

Kurvan är slät i övriga punkter. Till exempel i punkten $\mathbf{r}(1) = (1, 1, 0)$ har vi $\mathbf{T}(1) = \mathbf{r}'(1) = (3, 2, 0)$ och tangentlinjen är

$$L: \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.21)$$

Exempel 5.4 (Cirkeln på parameterform) Låt $R > 0, \omega > 0$ och bilda

$$C: \begin{cases} x = R \cos(\omega t), \\ y = R \sin(\omega t), \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.22)$$

eller

$$C: \mathbf{r} = R \cos(\omega t)\mathbf{e}_x + R \sin(\omega t)\mathbf{e}_y = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), 0), \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.23)$$

Vi eliminerar t genom att kvadrera: $x^2 + y^2 = R^2$. Detta är ekvationen för en cirkel i xy -planet med radie R och centrum i origo. Detta är en nivåkurva för funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$. Hastigheten är

$$\mathbf{v}(t) = -R\omega \sin(\omega t)\mathbf{e}_x + R\omega \cos(\omega t)\mathbf{e}_y = (-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t), 0), \quad (5.24)$$

och farten

$$v(t) = \sqrt{(-R\omega \sin(\omega t))^2 + (R\omega \cos(\omega t))^2} = \sqrt{R^2\omega^2} = |R\omega| = R\omega \quad (5.25)$$

Konstanten ω kallas *vinkelhastighet* och mäts i radianer per tidsenhet. Accelerationen är

$$\mathbf{a}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{e}_x - R\omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{e}_y = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad (5.26)$$

Observera att $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$, dvs hastigheten är ortogonal mot Ortsvektorn och att accelerationen är riktad in mot centrum.

Cirkeln är slät överallt. Till exempel: en tangentvektor i punkten $(0, R, 0)$ är $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(\pi/(2\omega)) = -R\omega \mathbf{e}_x$. Även $\hat{\mathbf{T}} = -\mathbf{e}_x$ är en riktningsvektor för tangentlinjen och vi får

$$L: \mathbf{r} = R\mathbf{e}_y - t\mathbf{e}_x, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.27)$$

eller

$$L: \begin{cases} x = -t, \\ y = R, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.28)$$

En kurva kan parametriseras på många sätt.

Exempel 5.5 (Halvcirkeln parametriserad på flera sätt) Vi betraktar halvcirkeln $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$. Den kan också beskrivas som en graf: $y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$. Vi parametriserar den på flera sätt.

(a) Välj parametern $t = \theta$ där θ är vinkeln i polära koordinater:

$$\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \sin(t), \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in [0, \pi] \quad (5.29)$$

Vi får

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin(t)\mathbf{e}_x + \cos(t)\mathbf{e}_y, \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = 1 \quad (5.30)$$

(b) Välj parametern $u = x$:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = \sqrt{1 - u^2}, \\ z = 0, \end{cases} \quad u \in [-1, 1] \quad (5.31)$$

Vi får

$$\mathbf{r}'(u) = \mathbf{e}_x - \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}\mathbf{e}_y, \quad \|\mathbf{r}'(u)\| = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (5.32)$$

(c) Välj parametern $v = 1 - x$:

$$\begin{cases} x = 1 - v, \\ y = \sqrt{1 - (1 - v)^2}, \\ z = 0, \end{cases} \quad v \in [0, 2] \quad (5.33)$$

Vi får

$$\mathbf{r}'(v) = -\mathbf{e}_x + \frac{1 - v}{\sqrt{1 - (1 - v)^2}}\mathbf{e}_y, \quad \|\mathbf{r}'(v)\| = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - v)^2}} \quad (5.34)$$

Vid byte av parameter har vi enligt kedjeregeln

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (5.35)$$

Vi ser att hastighetsvektorn multipliceras med skalären $\frac{ds}{dt}$. Det betyder att den ändrar längd och byter även riktning om $\frac{ds}{dt} < 0$. Det vill säga: byte av parameter ändrar farten och byter kurvans genomloppsriktning om $\frac{ds}{dt} < 0$. En kurva har ingen genomloppsriktning i sig själv; det är först

när vi parametriserar den som den får en riktning. I vårt exempel har vi $\frac{dv}{du} = \frac{d(1-x)}{dx} = -1$, dvs motsatt genomloppsriktning.

5.2 Kurvintegraler

Antag att vi har en kurva på parameterform med kontinuerligt deriverbar parametrering:

$$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b] \quad (5.36)$$

Vi vill beräkna kurvans längd. Vi bildar en partition av parameterintervallet:

$$a = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n = b, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad (5.37)$$

Linjärisering ger att

$$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) = \mathbf{r}'(t_{i-1})\Delta t_i + \mathbf{E}(t_i, \Delta t_i) \quad (5.38)$$

där linjäriseringsfelet uppfyller att $\|\mathbf{E}(t_i, \Delta t_i)\|/\Delta t_i \rightarrow 0$ då $\Delta t_i \rightarrow 0$. Det vill säga

$$\Delta \mathbf{r}_i \approx \mathbf{r}'(t_{i-1})\Delta t_i \quad (5.39)$$

Kurvans approximeras av den polygon som bildas av punkterna $\mathbf{r}(t_i)$ där avståndet mellan punkterna approximeras av

$$\|\Delta \mathbf{r}_i\| \approx \|\mathbf{r}'(t_{i-1})\|\Delta t_i \quad (5.40)$$

Kurvans längd approximeras då av summan

$$\sum_{i=1}^n \|\Delta \mathbf{r}_i\| \approx \sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}'(t_{i-1})\|\Delta t_i \quad (5.41)$$

Detta är en Riemann-summa som konvergerar mot enkelintegral då $\max_i \Delta t_i \rightarrow 0$:

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad (5.42)$$

Detta är kurvans längd.

Detta motiverar införandet av ett nytt integrationselement $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ så att (5.42) kan skrivas $L = \int_C ds$. Detta kallas båglängdselementet och kan användas för att integrera kontinuerliga funktioner över kurvan.

Definition 5.2 (Kurvintegral) Låt

$$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b] \quad (5.43)$$

vara en kurva med kontinuerligt deriverbar parametrering och $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig

funktion. Båglängdselementet på C är

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad (5.44)$$

och integralen av f över C definieras som

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad (5.45)$$

Speciellt har vi att kurvans längd ges av

$$L = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad (5.46)$$

Notera att integralen tecknas $\int_C f ds$ och beräknas som en enkelintegral $\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ efter att man har gjort en parametrisering av kurvan. Man kan visa att definitionen i (5.45) är korrekt i den meningen att integralen inte beror på valet av parametrisering. Beviset bygger på formeln (5.35) och variabelsubstitution i enkelintegral.

Exempel 5.6 (Integral över halvcirkel) Vi betraktar en halvcirkel med radie R , se exempel 5.5. Vi tar funktionen $f(x, y, z) = y$.

(a)

$$\begin{cases} x = R \cos(t), \\ y = R \sin(t), \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in [0, \pi] \quad (5.47)$$

Vi får

$$\mathbf{r}'(t) = -R \sin(t) \mathbf{e}_x + R \cos(t) \mathbf{e}_y, \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = R \quad (5.48)$$

så att båglängdselementet är $ds = R dt$ och kurvans längd

$$L = \int_C ds = \int_0^\pi R dt = \pi R \quad (5.49)$$

Integralen av f över C blir

$$\int_C f ds = \int_0^\pi (R \sin(t)) R dt = R^2 \int_0^\pi \sin(t) dt = 2R^2 \quad (5.50)$$

(b)

$$\begin{cases} x = u, \\ y = \sqrt{R^2 - u^2}, \\ z = 0, \end{cases} \quad u \in [-R, R] \quad (5.51)$$

Vi får

$$\mathbf{r}'(u) = \mathbf{e}_x - \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2}} \mathbf{e}_y, \quad \|\mathbf{r}'(u)\| = \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2}} \quad (5.52)$$

så att båglängdselementet är $ds = \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2}} du$ och kurvans längd

$$L = \int_C ds = \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2}} du = - \int_{\pi}^0 R d\theta = \pi R \quad (5.53)$$

där vi använt substitutionen $u = R \cos(\theta)$, $du = -R \sin(\theta) d\theta$. Integralen blir

$$\int_C f ds = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - u^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2}} du = 2R^2 \quad (5.54)$$

Exempel 5.7 (Båglängd för graf i planet) Vi betraktar en graf i planet:

$$C: y = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (5.55)$$

Vi väljer parametern $t = x$:

$$C: \begin{cases} x = t, \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (5.56)$$

Vi får

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{e}_x + f'(t)\mathbf{e}_y, \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}, \quad ds = \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \quad (5.57)$$

och

$$L = \int_C ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \quad (5.58)$$

Man kan också uttrycka detta i den ursprungliga variabeln x :

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \quad L = \int_C ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (5.59)$$

Man kan också gå tillbaka till (5.39) som motiverar införandet av ett vektorbåglängdselement:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \hat{\mathbf{T}} ds \quad (5.60)$$

där vi påminner om enhetstangentvektorn $\hat{\mathbf{T}}$ från (5.8).

Definition 5.3 (Tangentkurvintegral) Låt

$$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b] \quad (5.61)$$

vara en kurva med kontinuerligt deriverbar parametrisering och $\mathbf{F}: C \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett kontinuerligt vektorfält. Vektorbåglängdselementet på C är

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{T}} ds = \mathbf{r}'(t) dt \quad (5.62)$$

och tangentkurvintegralen av \mathbf{F} över C definieras som

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (5.63)$$

Vi observerar att integranden $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}$ i (5.63) är skalära projektionen av \mathbf{F} på tangentlinjen, dvs tangentkomponenten av \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} = \|\mathbf{F}\| \cos(\theta) \quad (5.64)$$

där θ är vinkeln mellan \mathbf{F} och $\hat{\mathbf{T}}$.

Exempel 5.8 (Arbete) Om $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ [N] är ett kraftfält, så blir arbetet som utträttas då en partikel rör sig längs kurvan C i fältet \mathbf{F} :

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds \quad [\text{Nm}] \quad (5.65)$$

Man integrerar alltså tangentkomponenten av kraftfältet längs kurvan.

Definition 5.4 (Konservativt vektorfält) Ett vektorfält \mathbf{F} kallas *konservativt* i D om det finns ett skalärt fält ϕ sådant att

$$\mathbf{F} = \nabla\phi \quad \text{i } D \quad (5.66)$$

Fältet ϕ kallas då *potential* till \mathbf{F} .

Man kan säga att potentialen ϕ (om den finns) är ett slags "primitiv funktion" till \mathbf{F} . I fysik och mekanik brukar man skriva definitionen i (5.66) med ett minustecken: $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, så att \mathbf{F} pekar dit där potentialen minskar mest.

Exempel 5.9 (Tyngdkraftfältet) Tyngdkraftfältet är

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -mge_z \quad [\text{N}] \quad \text{i } \mathbb{R}^3 \quad (5.67)$$

Det är riktat lodrätt med magnitud mg . Vi söker en potential genom att lösa (5.66), dvs

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x(x, y, z) = 0 \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y(x, y, z) = 0 \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_z(x, y, z) = -mg \quad (5.70)$$

De respektive ekvationerna ger

$$\phi(x, y, z) = f(y, z), \quad \phi(x, y, z) = g(x, z), \quad \phi(x, y, z) = -mgz + h(x, y) \quad (5.71)$$

där f, g, h är godtyckliga funktioner. Vi måste ha $f(y, z) = g(x, z) = -mgz + C$ och $h(x, y) = C$. Vi får alltså

$$\phi(x, y, z) = -mgz + C \quad [\text{Nm}] \quad (5.72)$$

Tyngdkraftfältet är alltså konservativt. I mekanik skriver man $\mathbf{F} = -\nabla P$, där $P = -\phi$ kallas potentiell energi. För tyngdkraftfältet har vi då $P(x, y, z) = mgz + C$. Se problem 5.171 för en motivering för beteckningen "konservativt fält".

En viktig fråga är huruvida det finns någon potential till ett givet vektorfält \mathbf{F} . Vi ska återkomma till den frågan senare. Nu ska vi se en viktig konsekvens av att fältet är konservativt.

Vi påminner om definition 4.5 som säger att en mängd D är sammanhängande om den inte kan delas upp i två disjunkta delmängder. Vi antar även att D är öppen, dvs att varje punkt i mängden har en omgivning som är i D . Detta är nödvändigt för att man ska kunna derivera funktioner i D .

Definition 5.5 (Oberoende av vägen) Låt D vara en öppen och sammanhängande mängd. Tangentkurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sägs vara oberoende av vägen i D om $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ för varje par av kurvor C_1, C_2 i D som har samma start- och slutpunkter.

Sats 5.1 (Konservativt fält medför oberoende av vägen) Antag att vektorfältet \mathbf{F} är konservativt med potential ϕ i en öppen och sammanhängande mängd D . Låt $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [a, b]$ vara en kurva i D . Då gäller

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) \quad (5.73)$$

Detta innebär att integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i D .

Obs att detta är en motsvarighet till analysens fundamentalsats (sats 1.5 i del II):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (5.74)$$

där potentialen ϕ spelar rollen av primitiv funktion till \mathbf{F} .

Bevis. Vi antar att \mathbf{F} är konservativt i D , dvs att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för någon potential ϕ . Tag en kurva C i D . Då får vi med hjälp av kedjeregeln och analysens fundamentalsats (sats 1.5 i del II):

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (5.75)$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}(t)) dt = [\phi(\mathbf{r}(t))]_a^b = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) \quad (5.76)$$

Vi ser att integralen beror endast på potentialens värden i kurvans start- och slutpunkter. Den är alltså oberoende av vägen. \square

Följande sats säger att konservativa fält är de enda fält vars integral är oberoende av vägen.

Sats 5.2 (Oberoende av vägen) Antag att vektorfältet \mathbf{F} är kontinuerligt i en öppen och sammanhängande mängd D . Då är följande påståenden ekvivalenta.

- (a) \mathbf{F} är konservativt i D .
- (b) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva C i D .
- (c) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i D .

Bevis. Vi har redan visat endast att (a) medför (c) i sats 5.1. Vi utelämnar resten av beviset. \square

5.3 Ytor

Definition 5.6 (Yta på parameterform) En yta S är en punktmängd i rummet som kan parametriseras med en kontinuerlig funktion $\mathbf{r}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D \quad (5.77)$$

det vill säga, med $\mathbf{r} = (x, y, z)$,

$$S: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad (5.78)$$

där $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Variablerna u, v kallas *parametrar*. Vi antar vidare att \mathbf{r} är deriverbar med kontinuerlig derivata.

Den enklaste (och därmed viktigaste) ytan är planet.

Exempel 5.10 (Planet) Ett plan bestäms av en punkt i planet och två vektorer som är parallella med planet. Låt punkten vara P_0 med Ortsvektorn \mathbf{r}_0 och vektorerna vara \mathbf{a} och \mathbf{b} . Vektorerna får inte vara kolinjära, dvs kryssprodukten måste vara skild från $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \quad (5.79)$$

I så fall ges koordinaterna för en allmän punkt i planet av \mathbf{r}_0 plus en linjär kombination av vektorerna \mathbf{a} , \mathbf{b} :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (5.80)$$

Detta är planets ekvation på parameterform. Vektorn \mathbf{N} är en normalvektor till planet.

Exempel 5.11 (Gräf) En graf $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, kan parametreras med $u = x$, $v = y$:

$$S: \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad (5.81)$$

Exempel 5.12 (Sfär) En sfär $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, kan parametreras med sfäriska koordinater (ρ, ϕ, θ) . Vi har $\rho = R$ och väljer $u = \phi$, $v = \theta$:

$$S: \begin{cases} x = R \sin(u) \cos(v), \\ y = R \sin(u) \sin(v), \\ z = R \cos(u) \end{cases} \quad (u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \quad (5.82)$$

Exempel 5.13 (Tangentplan) Låt $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ vara en yta och tag en punkt $(u_0, v_0) \in D$. Genom att variera en parameter åt gången får vi två koordinatkurvor på ytan genom punkten $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0), \quad u \in I_1 \quad (5.83)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v), \quad v \in I_2 \quad (5.84)$$

för några intervall I_1 , I_2 . Kurvornas tangentvektorer får vi genom att derivera med avseende på respektive parameter:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \quad (5.85)$$

Dessa vektorer spänner upp ett plan om de inte är kolinjära. Det kan man testa med kryss-

produkten:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \quad (5.86)$$

Om $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$, så spänner tangenterna upp ett plan med \mathbf{N} som normalvektor. Detta plan kallas tangentplanet till S i punkten \mathbf{r}_0 . Dess ekvation på parameterform är

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) + v \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (5.87)$$

Man kan också härleda detta genom att linjärisera parametriseringen (5.77) i punkten (u_0, v_0) . Linjäriseringen är

$$\mathbf{L}_{(u_0, v_0)}(u, v) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'(u_0, v_0) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (5.88)$$

Jacobi-matrisen har de partiella derivatorna som kolonner:

$$\mathbf{r}'(u_0, v_0) = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \right] \quad (5.89)$$

så att (5.88) beskriver ett plan

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (u - u_0) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) + (v - v_0) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (5.90)$$

Detta är samma plan som i (5.87); vi har endast en förskjutning av parametrarna. Eftersom $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ kan vi normera och bilda *enhetsnormalvektorn*:

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} \quad (5.91)$$

5.4 Ytintegraler

Låt S vara en yta på parameterform som i (5.77). Vi vill beräkna dess area. Vi resonerar som för kurvintegral i avsnitt 5.2. Vi bildar en partition i u, v -planet med punkter (u_i, v_j) och steglängder $\Delta u_i, \Delta v_j$. Punkten (u_{i-1}, v_{j-1}) är hörn i en delrektangel som spänns upp av vektorerna $\Delta u_i \mathbf{e}_u$ och $\Delta v_j \mathbf{e}_v$ med arean $\Delta u_i \Delta v_j$. Dessa vektorer avbildas på vektorerna

$$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}(u_i, v_{j-1}) - \mathbf{r}(u_{i-1}, v_{j-1}) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta u_i \quad (5.92)$$

$$\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}(u_{i-1}, v_j) - \mathbf{r}(u_{i-1}, v_{j-1}) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta v_j \quad (5.93)$$

där vi använt approximation med linjärisering, se (5.39) och (5.88). Arean som spänns upp av dessa ges av normen av kryssprodukten

$$\|\Delta \mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{r}_j\| \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta u_i \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta v_j \right\| \quad (5.94)$$

$$= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right\| \Delta u_i \Delta v_j \quad (5.95)$$

eftersom $\Delta u_i > 0$, $\Delta v_j > 0$. Ytans area approximeras av dubbelsumman

$$\sum_i \sum_j \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right\| \Delta u_i \Delta v_j \quad (5.96)$$

Detta är en Riemann-summa som konvergerar mot integralen

$$A = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| du dv \quad (5.97)$$

vilket är arean för ytan. Detta motiverar införandet av areaelementet för ytan:

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| du dv \quad (5.98)$$

så att (5.97) kan skrivas $A = \int_S dS$.

Definition 5.7 (Ytintegral) Låt

$$S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D \quad (5.99)$$

vara en yta med kontinuerligt deriverbar parametrering och $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Areaelementet på S är

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| du dv \quad (5.100)$$

och integralen av f över S definieras som

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| du dv \quad (5.101)$$

Speciellt har vi att ytans area ges av

$$A = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| du dv \quad (5.102)$$

Notera att integralen tecknas $\iint_S f dS$ och beräknas som en dubbeltintegral $\iint_D \dots du dv$ efter att man har gjort en parametrering av ytan. Man kan visa att definitionen i (5.101) är korrekt i den meningen att integralen inte beror på valet av parametrering. Beviset bygger på variabelsubstitution i dubbeltintegral.

Exempel 5.14 (Graf) En graf $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, kan parametreras med $u = x$, $v = y$:

$$S: \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad (5.103)$$

Vi beräknar tangentvektorerna

$$\mathbf{r}'_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 0, f'_1(u, v)), \quad \mathbf{r}'_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, f'_2(u, v)) \quad (5.104)$$

och en normalvektor

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & f'_1(u, v) \\ 0 & 1 & f'_2(u, v) \end{vmatrix} = (-f'_1(u, v), -f'_2(u, v), 1) \quad (5.105)$$

Areaelementet är

$$dS = \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| du dv = \sqrt{1 + f'_1(u, v)^2 + f'_2(u, v)^2} du dv \quad (5.106)$$

I de ursprungliga variablerna blir detta

$$dS = \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2} dx dy \quad (5.107)$$

Definition 5.8 (Orienterbar yta) En yta S kallas orienterbar om det finns ett normalvektorfält \mathbf{N} som varierar kontinuerligt över S . Genom att välja ett sådant normalvektorfält ger vi ytan en orientering och vi har då en orienterad yta.

Att välja en orientering av en yta innebär att man bestämmer vilken sida av ytan som är "upp" eller "ned" ("in" eller "ut"). Att ha en orientering är nödvändigt då man ska tala om flöde genom ytan.

Möbius band är ett exempel på en yta som inte är orienterbar: om man börjar på ena sidan och rör sig på bandet ett varv så kommer man tillbaka på den andra sidan. Man kan inte säga vad som är upp eller ned.

Om vi har en orienterad yta S med ett valt normalvektorfält \mathbf{N} så kan vi bilda flödesintegralen av ett vektorfält \mathbf{F} :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad (5.108)$$

där vi använt enhetsnormalvektorn $\hat{\mathbf{N}}$. Detta innebär att vi integrerar normalkomponenten $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \|\mathbf{F}\| \cos(\theta)$ av \mathbf{F} , där θ är vinkeln mellan \mathbf{N} och \mathbf{F} .

Om vi använder kurvans parametrisering så får vi

$$\mathbf{N} = \pm(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v), \quad \hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|} \quad (5.109)$$

där valet av tecken innebär att vi väljer en orientering. Flödesintegralen i (5.108) motiverar att vi inför normalytelementet:

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|} \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| du dv = \pm(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) du dv \quad (5.110)$$

Definition 5.9 (Normalytintegral) Låt

$$S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D \quad (5.111)$$

vara en orienterad yta med kontinuerligt deriverbar parametrisering och $\mathbf{F}: C \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett kontinuerligt vektorfält. Normalytelementet på S är

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} dS = \pm(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) du dv \quad (5.112)$$

där valet av tecken beror på valet av orientering. Normalytintegralen av \mathbf{F} över S definieras som

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) du dv \quad (5.113)$$

Integralen kallas också flödesintegral och storheten $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}$ kallas då flödestäthet.

Exempel 5.15 (Vätskeflöde) Låt \mathbf{v} [m/s] vara hastighetsfältet i en strömmande vätska och låt S vara en orienterad yta. Volymflödet genom ytan blir då

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad (5.114)$$

Om vätskan har densiteten d [kg/m³] så blir massflödet genom ytan

$$\iint_S d \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad [\text{kg}/\text{s}] \quad (5.115)$$

Exempel 5.16 (Integrera på sfären) En sfär $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, kan parametriseras

med sfäriska koordinater (ρ, ϕ, θ) . Vi har $\rho = R$ och väljer ϕ, θ som parametrar:

$$S: \begin{cases} x = R \sin(\phi) \cos(\theta), \\ y = R \sin(\phi) \sin(\theta), \\ z = R \cos(\phi) \end{cases} \quad (\phi, \theta) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \quad (5.116)$$

Vi beräknar tangenterna

$$\mathbf{r}'_{\phi} = (R \cos(\phi) \cos(\theta), R \cos(\phi) \sin(\theta), -R \sin(\phi)) \quad (5.117)$$

$$\mathbf{r}'_{\theta} = (-R \sin(\phi) \sin(\theta), R \sin(\phi) \cos(\theta), 0) \quad (5.118)$$

En normalvektor

$$\mathbf{r}'_{\phi} \times \mathbf{r}'_{\theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ R \cos(\phi) \cos(\theta) & R \cos(\phi) \sin(\theta) & -R \sin(\phi) \\ -R \sin(\phi) \sin(\theta) & R \sin(\phi) \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \quad (5.119)$$

$$= R^2 \sin(\phi) \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) & -\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \quad (5.120)$$

$$= R^2 \sin(\phi) (\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi)) = R^2 \sin(\phi) \hat{\mathbf{r}} \quad (5.121)$$

där vi observerade att

$$(\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi)) = \frac{\mathbf{r}}{R} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \hat{\mathbf{r}} \quad (5.122)$$

är den normerade Ortsvektorn på sfären. Vektorn pekar alltså rakt ut från origo. Vi får

$$\|\mathbf{r}'_{\phi} \times \mathbf{r}'_{\theta}\| = R^2 \sin(\phi), \quad \hat{\mathbf{N}} = \pm \hat{\mathbf{r}} \quad (5.123)$$

De två ytelementen är

$$dS = R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta \quad (5.124)$$

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \hat{\mathbf{r}} R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta \quad (5.125)$$

Sfärens area är

$$A = \iint_S dS = \iint_D R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta = \left\{ \text{Fubini} \right\} \quad (5.126)$$

$$= R^2 \int_0^{\pi} \sin(\phi) d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi R^2 \quad (5.127)$$

Flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ i riktning \mathbf{u} genom sfären

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_D \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \cdot (\pm \hat{\mathbf{r}}) R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta = \left\{ \text{välj plus för utflöde} \right\} \quad (5.128)$$

$$= \iint_D \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}\|^3} R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta = \iint_D \sin(\phi) d\phi d\theta = 4\pi \quad (5.129)$$

ty $\frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}\|^3} = \frac{R}{R^3} = \frac{1}{R^2}$ på S . Obs att flödet inte beror på sfärens radie. Vi ska fortsätta diskutera detta i exempel 5.19 och exempel 5.22.

5.5 Grad, div, rot

Vi påminner om att ett *fält* är en funktion av rumskoordinaterna (x, y, z) . Det kan vara ett *skalärt fält* $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eller *vektorfält* $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definition 5.10 (Gradient, divergens, rotation) Nabla-operatorn är

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (5.130)$$

Nabla är en deriveringsoperator som verkar på deriverbara fält. Vi kan bilda gradienten av ett skalärt fält:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) f \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.131)$$

Vi kan bilda divergensen och rotationen av ett vektorfält:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.132)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \times (F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z) \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.133)$$

Observera att ∇f och $\nabla \times \mathbf{F}$ är vektorfält medan $\nabla \cdot \mathbf{F}$ är ett skalärt fält. Rotationen skrivs ofta som $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ i engelskspråkig litteratur.

Exempel 5.17 (Stelkroppsrotation) Hastighetsfältet i en stel kropp som roterar kring z -axeln med vinkelhastigheten ω [1/s] (radianer per sekund) är

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \omega (-y, x, 0) \quad [\text{m/s}] \quad (5.134)$$

Vi får

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = 0 \quad [1/\text{s}] \quad (5.135)$$

$$\nabla \times \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \mathbf{e}_z \quad [1/\text{s}] \quad (5.136)$$

Denna rörelse har ingen divergens, endast rotation.

Exempel 5.18 (Ren divergens) Med $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ får vi $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Ingen rotation, endast divergens.

Exempel 5.19 (Divergensfritt utom i origo) Vi betraktar vektorfältet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = \frac{(x, y, z)}{\rho^3}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5.137)$$

Vi har

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\rho} \quad (5.138)$$

och

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\rho^3} \right) = \frac{\rho^3 - x \frac{\partial}{\partial x} \rho^3}{\rho^6} \quad (5.139)$$

$$= \frac{\rho^3 - 3x\rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}}{\rho^6} = \frac{\rho^3 - 3 \frac{x^2}{\rho}}{\rho^6} = \frac{\rho^2 - 3x^2}{\rho^5} \quad (5.140)$$

På samma vis får vi

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\rho^2 - 3y^2}{\rho^5} \quad (5.141)$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\rho^2 - 3z^2}{\rho^5} \quad (5.142)$$

så att

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{3\rho^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{\rho^5} = 0, \quad \text{för } \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \quad (5.143)$$

Fältet är divergensfritt utom i origo. Vi har redan sett i exempel 5.16 att flödet av \mathbf{F} ut genom sfären är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 4\pi \quad (5.144)$$

Detta värde är oberoende av sfärens radie. Vi ska återkomma till detta exempel senare och tolka det som att det finns en källa till flödet i origo, se exempel 5.22.

Sats 5.3 (Några räkneregler för nabla)

$$(a) \quad \nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \quad (5.145)$$

$$(b) \quad \nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (5.146)$$

$$(c) \quad \nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F}) \quad (5.147)$$

$$(d) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (5.148)$$

$$(e) \quad \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (5.149)$$

Bevis. Dessa formler bevisas genom att man skriver på komponentform och använder redan kända räkneregler för derivator. Vi lämnar det till läsaren i problem 5.5. \square

Reglerna i (a)–(c) är varianter av produktregeln för derivata. Det finns naturligtvis fler sätt att kombinera nabla med skalära fält och vektorfält, t ex $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$, vilket leder till fler räkneregler. Dessa är ganska komplicerade och av mindre intresse.

Vi noterar att om \mathbf{F} är konservativt, dvs $\mathbf{F} = \nabla\phi$ i D , så ger (5.149) att

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0} \quad \text{i } D \quad (5.150)$$

dvs ett konservativt fält är rotationsfritt. Detta är ett nödvändigt villkor för att ett fält ska vara konservativt, dvs att ekvationen $\nabla\phi = \mathbf{F}$ ska ha någon lösning ϕ . I nästa sats ska vi se att det är även ett tillräckligt villkor om vi lägger ett starkare krav på området D .

Definition 5.11 (Enkelt sammanhängande mängd) En öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, kallas enkelt sammanhängande om den är sammanhängande och om varje sluten kurva C i D inte omsluter några punkter som inte tillhör D .

Enkelt sammanhängande innebär att mängden inte har några genomgående hål. I planet är till exempel en cirkelskiva enkelt sammanhängande, men en hålskiva

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < b^2\} \quad (5.151)$$

är inte enkelt sammanhängande. I rummet \mathbb{R}^3 är hålklottet

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < b^2\} \quad (5.152)$$

enkelt sammanhängande, men det genomborrade klotet

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < b^2, 0 < x^2 + y^2\} \quad (5.153)$$

är ej enkelt sammanhängande. Hålen i en mängd D är typiskt punkter där ett givet fält \mathbf{F} inte är deriverbart.

Sats 5.4 (Tilläckligt villkor för potential) Antag att $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ i ett enkelt sammanhängande område D . Då är \mathbf{F} konservativt i D , dvs det finns ett deriverbart fält ϕ sådant att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ i D .

Vi utelämnar beviset.

Satsen ger ett villkor för att systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} \phi'_x = F_x \\ \phi'_y = F_y \\ \phi'_z = F_z \end{cases} \quad \text{i } D \quad (5.154)$$

ska vara lösbart. I exempel 5.9 såg vi att tyngdkraftfältet är konservativt i \mathbb{R}^3 . Här är ett annat enkelt exempel.

Exempel 5.20 (Konservativt fält) Vi tar $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ i \mathbb{R}^3 . Då får vi $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ och sats 5.4 garanterar att det finns en potential. Vi löser (5.154):

$$\begin{cases} \phi'_x = x \\ \phi'_y = y \\ \phi'_z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + f(y, z) \\ \phi(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 + g(x, z) \\ \phi(x, y, z) = \frac{1}{2}z^2 + h(x, y) \end{cases} \quad (5.155)$$

Vi väljer $f(y, z) = \frac{1}{2}(y^2 + z^2) + C$, $g(x, z) = \frac{1}{2}(x^2 + z^2) + C$, $h(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$, och får $\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C = \frac{1}{2}\|\mathbf{r}\|^2 + C$.

5.6 Gauss divergenssats

Innan vi formulerar divergenssatsen introducerar vi en beteckning. Kom ihåg att en kurva kallas slät (eller glatt) om det finns en tangent i varje punkt på kurvan.

Definition 5.12 (Slät yta) En yta S kallas *slät* (eller *glatt*) om det finns ett kontinuerligt varierande enhetsnormalvektorfält i varje punkt på ytan. Med andra ord: det ska finnas en parametrisering så att

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|} \quad (5.156)$$

existerar (dvs $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$). Man kan då välja en orientering av ytan. Ytan är en *styckvis slät orienterad yta* om den är hopskarvad av släta orienterade ytor så att orienteringarna från båda sidorna om skarven stämmer överens.

Obs at $\hat{\mathbf{N}}$ behöver inte vara definierad på skarven mellan ytorna.

Sats 5.5 (Gauss divergenssats i rummet) Antag att D är en begränsad mängd i rummet \mathbb{R}^3 vars rand är en styckvis slät orienterad yta S med utåtriktat enhetsnormalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$. Om \mathbf{F} är ett vektorfält med kontinuerlig derivata i D , så gäller

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, dS \quad (5.157)$$

Gauss sats är en 3-D version av analysens fundamentalsats (sats 1.5 i del II):

$$\int_a^b Df \, dx = [f]_a^b = f(b) - f(a) \quad (5.158)$$

Beviset bygger på fundamentalsatsen, men är ganska invecklat. Vi utelämnar det.

Notera likheten mellan (5.157) och (5.158): en derivata "integreras upp" och sedan summerar (integrerar) man den utåtriktade normalkomponenten av funktionen på randen av integrationsområdet. På randen av $[a, b]$ har vi $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{e}_x$ vid $x = b$ och $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{e}_x$ vid $x = a$, vilket ger upphov till tecknet framför $f(a)$ respektive $f(b)$. En minnesregel för att komma ihåg (5.157) är att ∇ i vänsterledet blir $\hat{\mathbf{N}}$ i högerledet.

Gauss sats relaterar divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F}$ i D till utflödet $\iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, dS$ genom S . Man kan tänka på $\nabla \cdot \mathbf{F}$ som en *källtäthet* i D och på $\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}$ som en *flödestäthet* på S .

Exempel 5.21 (Vätskeflöde) Vi återvänder till exempel 5.15. Låt \mathbf{v} [m/s] vara hastighetsfältet i en strömmande vätska och låt S vara randen till ett område D som i sats 5.5. Satsen säger

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = \iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad (5.159)$$

Källtätheten är $\nabla \cdot \mathbf{v}$ [1/s] och flödestätheten $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}$ [m/s]. För massflödet har vi $\mathbf{F} = d\mathbf{v}$ [kg/(m²s)] och

$$\iiint_D \nabla \cdot (d\mathbf{v}) \, dV = \iint_S d\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS \quad [\text{kg}/\text{s}] \quad (5.160)$$

Källtätheten är $\nabla \cdot (d\mathbf{v})$ [kg/(m³s)] och flödestätheten $d\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}$ [kg/(m²s)]. I nästa kapitel ska vi studera värmeflöde på liknande sätt.

Exempel 5.22 (Punktkälla i origo) Vi återvänder till exempel 5.19. Vi betraktar vektorfältet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = \frac{(x, y, z)}{\rho^3}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5.161)$$

Vi såg att $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ utom i origo. I exempel 5.16 såg vi att utflödet av \mathbf{F} genom sfären S_R

med radie R är oberoende av R :

$$\iint_{S_R} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 4\pi \quad (5.162)$$

Sfären S_R är randen till klotet $B_R = \{\|\mathbf{r}\| \leq R\}$ men vi kan inte tillämpa Gauss sats på B_R för \mathbf{F} är inte deriverbar i origo. Då tar vi bort ett litet klot B_ϵ (med radie $\epsilon < R$) och bildar hålklotet $D_{\epsilon,R} = \{\epsilon \leq \|\mathbf{r}\| \leq R\}$ vars rand är $S_{\epsilon,R} = S_\epsilon \cup S_R$. Gauss sats ger nu

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iint_{S_{\epsilon,R}} \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, dS = \iint_{S_\epsilon} \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, dS + \iint_{S_R} \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, dS \quad (5.163)$$

Här är $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{r}}$ på S_R och $\hat{\mathbf{N}} = -\hat{\mathbf{r}}$ på S_ϵ (utåt från $D_{\epsilon,R}$), så att

$$\iint_{S_\epsilon} \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, dS = - \iint_{S_R} \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, dS = -4\pi \quad (5.164)$$

Därför är båda sidorna i (5.163) lika med 0, dvs ingen källthet i $D_{\epsilon,R}$ och inget nettoflöde ut ur området. Flödet 4π ut genom S_R måste då komma från en källa i origo, en punktkälla med styrkan 4π .

Exempel 5.23 Vi beräknar flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ genom den del av ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger under planet $z = 4$. Ytan orienteras med uppåtriktade normalvektorer.

Vi har $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$. Vi kan inte använda Gauss sats direkt för ytan S är inte sluten. Vi sluter den genom att lägga till locket S_1 vid $z = 4$. Då är $S \cup S_1$ randen till ett område D . Vi observerar att på S är vår uppåtriktade $\hat{\mathbf{N}}$ inåtriktad, så att den utåtriktade normalvektorn är $-\hat{\mathbf{N}}$. Divergenssatsen ger:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS + \iint_S \mathbf{F} \cdot (-\hat{\mathbf{N}}) \, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \quad (5.165)$$

$$= \iiint_D 3 \, dV = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} r \, dr \, dz \, d\theta = 24\pi \quad (5.166)$$

På S_1 har vi $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{e}_z$ så att $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = F_z(x, y, z) = z = 4$. Alltså:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 4 \text{ area}(S_1) = 4 \cdot 4\pi = 16\pi \quad (5.167)$$

och slutligen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 16\pi - 24\pi = -8\pi \quad (5.168)$$

Gauss sats gäller också för vektorfält i planet, dvs $\mathbf{F}(x, y) = F_x(x, y)\mathbf{e}_x + F_y(x, y)\mathbf{e}_y$. Enda skillnaden blir att vi byter trippelintegralen mot en dubbelintegral och ytintegralen mot en kurvin-tegral.

Sats 5.6 (Gauss divergenssats i planet) Antag att D är en begränsad mängd i planet \mathbb{R}^2 vars rand är en styckvis slät kurva C med utåtriktat enhetsnormalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$. Om \mathbf{F} är ett vektorfält med kontinuerlig derivata i D , så gäller

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, ds \quad (5.169)$$

En styckvis slät kurva har enhetstangent $\hat{\mathbf{T}}$ utom i skarvarna. Vi väljer en enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ som är ortogonal mot $\hat{\mathbf{T}}$ och riktad utåt från D .

5.7 Övningar

5.1 Kurvor

Övning 5.1 Bestäm tangentlinjen på parameterform till C i punkten P_0 .

$$(a) C: \begin{cases} x = 2 \cos(t), \\ y = \sin(t), \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad P_0 = (0, 1, \pi/2)$$

$$(b) C: \begin{cases} x = (1 + t^3), \\ y = t \exp(-t), \\ z = \sin(2t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad P_0 = (1, 0, 0)$$

$$(c) C: y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}; \quad P_0 = (3, 9)$$

$$(d) C: \mathbf{r} = \cos(3t)\mathbf{e}_x + \sin(4t)\mathbf{e}_y + t^2\mathbf{e}_z; \quad P_0 = (-1, 0, \pi^2)$$

5.2 Kurvintegraler

Övning 5.2 Beräkna längden av C .

$$(a) C: \begin{cases} x = a \cos(t), \\ y = a \sin(t), \\ z = bt, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad (b) C: \begin{cases} x = \sqrt{2}t, \\ y = e^t, \\ z = e^{-t}, \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$(c) C: \mathbf{r} = (1, t^2, t^3), \quad t \in [0, 1]$$

Övning 5.3 Beräkna $\int_C f \, ds$.

$$(a) f(x, y, z) = 2 + x^2y, C \text{ är övre halvan av enhetscirkeln}$$

$$(b) f(x, y, z) = x, C \text{ är rät linjen från } (2, 0, 0) \text{ till } (3, 4, 5)$$

$$(c) f(x, y, z) = 2x, C = C_1 \cup C_2 \text{ där } C_1 \text{ är den del av parabeln } y = x^2 \text{ som går från } (0, 0) \text{ till } (1, 1) \text{ och } C_2 \text{ är den rät linjen från } (1, 1) \text{ till } (1, 2)$$

Övning 5.4 Beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

$$(a) \mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, -xy, 0), C \text{ kvartscirkel med radie 1 från } (1, 0, 0) \text{ till } (0, 1, 0)$$

$$(b) \mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx), C: \mathbf{r} = (t, t^2, t^3), t \in [0, 1]$$

Övning 5.5 Beräkna integralen $\int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ där C är kurvan $\mathbf{r} = (3 \cos(t), 3 \sin(t), t)$, $t \in [1, 5]$.

5.3 Ytor

Övning 5.6 Bestäm tangentplanet till S i punkten P_0 . Svara med planets ekvation på standardform: $Ax + By + Cz = D$.

(a) $S: \mathbf{r} = (u^2, v^2, u + 2v), P_0 = (1, 1, 3)$

(b) $S: \mathbf{r} = u^2\mathbf{e}_x + 2u \sin(v)\mathbf{e}_y + u \cos(v)\mathbf{e}_z, (u_0, v_0) = (1, 0)$

5.4 Ytintegraler

Övning 5.7 Beräkna arean av S .

(a) S är den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ som ligger under planet $z = 9$.

(b) S är den del av planet $3x + 2y + z = 6$ som ligger i första oktanten.

(c) S är den del av planet $x + 2y + 3z = 1$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 3$.

(d) S är den del av ytan $z = xy$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$.

Övning 5.8 Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ där $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ och S är enhetsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ med utåtriktad orientering.

Övning 5.9 Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ där $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ och S är randen till området som begränsas av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och planet $z = 0$ med utåtriktad orientering.

Övning 5.10 Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z^2\mathbf{e}_z$ ut ur området $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq 1\}$.

5.5 Grad, div, rot

Övning 5.11

5.6 Gauss divergenssats

Övning 5.12 Beräkna flödet i övning 5.10 med hjälp av divergenssatsen.

Övning 5.13 Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z)$ ut ur klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ med hjälp av Gauss divergenssats.

5.8 Problem

5.1 Kurvor

Problem 5.1 Visa att $\frac{d}{dt} \|\mathbf{r}(t)\| = \frac{\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ om $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

5.2 Kurvintegraler

Problem 5.2 En tråd i form av halvcirkeln $x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$, med radie R [m] är belagd med massa med densitet som varierar enligt $\delta(x, y, z) = k(1 - y/R)$ där k [kg/m] är konstant. Bestäm dess masscentrum.

Problem 5.3 (Konservering av energi) En partikel med massan m rör sig längs kurvan $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [a, b]$, i kraftfältet \mathbf{F} . Newtons andra lag säger att kraften är lika med massan gånger accelerationen, dvs

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t) \quad (5.170)$$

Visa att arbetet som uträttas är

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}(b)\|^2 - \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}(a)\|^2 \quad (5.171)$$

Kvantiteten $K(\mathbf{v}(t)) = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}(t)\|^2$ kallas kinetisk energi (rörelseenergi). Ändringen i kinetisk energi är alltså lika med arbetet som uträttas av kraften.

Om kraften är konservativ, dvs $\mathbf{F} = \nabla\phi$, så är $W = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) = -P(\mathbf{r}(b)) + P(\mathbf{r}(a))$, där $P = -\phi$ är den potentiella energin, se sats 5.1. Visa att detta leder till

$$K(\mathbf{v}(b)) + P(\mathbf{r}(b)) = K(\mathbf{v}(a)) + P(\mathbf{r}(a)) \quad (5.172)$$

dvs den totala energin $E(t) = K(\mathbf{v}(t)) + P(\mathbf{r}(t))$ är konstant.

5.3 Ytor

5.4 Ytintegraler

Problem 5.4 Beräkna $\iint_S z \, dS$ där S är ytan vars sida S_1 är cylindern $x^2 + y^2 = 1$, vars botten S_2 är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$ i planet $z = 0$, och vars lock S_3 är den del av planet $z = 1 + x$ som ligger ovanför S_2 . Med andra ord: ytan är randen till den del av cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$ som begränsas av planet $z = 1 + x$ och $z = 0$.

5.5 Grad, div, rot

Problem 5.5 Bevisa sats 5.3.

5.6 Gauss divergenssats

Problem 5.6

6. Randvärdessproblem och FEM i flera variabler

6.1	Partiell integration	143
6.2	Härledning av värmeledningsekvationen	145
6.3	Poissons ekvation	147
6.4	Svag formulering	148
6.5	Finita elementmetoden i 2-D	149
6.6	Problem	152

Vi vi börjar med att härleda en formel för partiell integration i flera variabler. Sedan härleder vi värmeledningsekvationen från två principer: en konserveringslag (konservering av energi) och en konstitutiv lag (Fouriers lag för värmeledning). Vi härleder även randvillkor och får då ett randvärdesproblem. Detta omformuleras med hjälp av partiell integration till en svag form, vilken är grunden för härledningen av finita elementmetoden.

6.1 Partiell integration

Kom ihåg att finita elementmetoden bygger på den *svaga formuleringen* av *randvärdesproblemet* och att den svaga formuleringen bygger på *partiell integration*. Partiell integration bygger i sin tur på en kombination av *analysens fundamentalsats* och *produktderiveringsregeln*.

Analysens fundamentalsats (sats 1.5 i del II): säger att

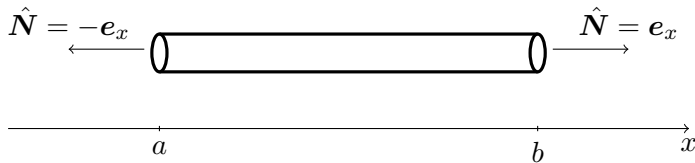
$$\int_a^b Du(x) dx = [u(x)]_a^b = u(b) - u(a).$$

Obs att insättnings termen $[u(x)]_a^b = u(b) - u(a)$ har plustecken i intervallets högra randpunkt b och minustecken i den vänstra randpunkten a . Tecknet kommer från den *utåtriktade enbetsnormalen* (figur 6.1):

$$\hat{N} = -e_x \text{ vid } x = a, \quad \hat{N} = e_x \text{ vid } x = b \quad (6.1)$$

Produktderiveringsregeln säger att

$$D(uv) = Du v + u Dv \quad (6.2)$$



Figur 6.1: Utåtriktade enhetsnormaler.

Tillsamman med fundamentalsatsen ger detta

$$\left[uv\right]_a^b = \int_a^b D(uv) \, dx = \int_a^b Du \, v \, dx + \int_a^b u \, Dv \, dx \quad (6.3)$$

dvs *partiell integration*

$$\int_a^b Du \, v \, dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u \, Dv \, dx \quad (6.4)$$

Obs hur derivatan D flyttar över från u till v och att insättnings termen inte innehåller någon derivata.

Vi behöver en flervariabelversion av detta. Det finns flera motsvarigheter till fundamentalsatsen och produktderivering, se sats 5.1, sats 5.5 och sats 5.3. Vi väljer följande.

Fundamentalsats: Gauss divergenssats, sats 5.5,

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, dS. \quad (6.5)$$

Här är D ett begränsat område vars rand $S = \partial D$ är en styckvis slät, orienterad yta med utåtriktad enhetsnormalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$.

Satsen relaterar integralen av divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F}$ av vektorfältet \mathbf{F} i D till det utflödet av \mathbf{F} genom randen S . Flödesintegralen $\iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$ motsvarar insättnings termen $\left[u(x)\right]_a^b$ i den vanliga fundamentalsatsen. Obs att vektorn ∇ i vänsterledet ersätts av vektorn $\hat{\mathbf{N}}$ i högerledet.

Produktderivering: Formel (b) i sats 5.3,

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{F} + \phi \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (6.6)$$

Tillsammans med divergenssatsen ger detta

$$\iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \phi \, dS = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot (\phi \mathbf{F}) \, dS = \iiint_D \nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) \, dV \quad (6.7)$$

$$= \iiint_D (\nabla \cdot \mathbf{F}) \phi \, dV + \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \, dV \quad (6.8)$$

dvs *partiell integration*

$$\iiint_D (\nabla \cdot \mathbf{F}) \phi \, dV = \iint_S (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}) \phi \, dS - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \, dV \quad (6.9)$$

Obs hur nabla-operatorn ∇ flyttar över från \mathbf{F} till ϕ och att flödesintegralen inte innehåller någon derivata. Vektorn ∇ ersätts av $\hat{\mathbf{N}}$ i flödesintegralen.

6.2 Härledning av värmeledningsekvationen

Vi ska härleda värmeledningsekvationen. Härledningen bygger på en konserveringslag, som uttrycker att en viss kvantitet bevaras, samt en konstitutiv lag, som beskriver materialets egenskaper.

Vi studerar stationär (tidsoberoende) värmeledning i en kropp D i rummet med begränsningsytan S . Vi inför följande beteckningar:

$$u(x, y, z) \quad \text{temperaturen [K] i punkten } (x, y, z) \text{ [m]} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) \quad \text{värmeflödestäthet (vektorfält) [J/(m}^2\text{s)]} \quad (6.11)$$

$$a(x, y, z) \quad \text{värmeledningskoefficient [J/(mKs)]} \quad (6.12)$$

$$f(x, y, z) \quad \text{kältäthet för inre värmekällor [J/(m}^3\text{s)]} \quad (6.13)$$

$$u_A(x, y, z) \quad \text{omgivningens temperatur ("ambient temperature") [K]} \quad (6.14)$$

$$k(x, y, z) \quad \text{värmeöverföringskoefficient för det isolerande ytskiktet [J/(m}^2\text{sK)]} \quad (6.15)$$

$$g(x, y, z) \quad \text{flödestäthet för värmekällor på ytan [J/(m}^2\text{s)]} \quad (6.16)$$

Konserveringslag: energiprincipen. Vi betraktar värmebalansen i en godtycklig delvolym D_0 med begränsningsytan S_0 . Nettoflödet av värme ut genom S_0 är $\iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$ [J/s]. Här är $\hat{\mathbf{N}}$ den utåtriktade enhetsnormalen till ytan S_0 , se figur 6.2. Energiprincipen säger att värmeflödet ut genom S_0 är lika med värmeproduktionen per tidsenhet inuti D_0 , dvs $\iiint_{D_0} f \, dV$ [J/s]. Alltså

$$\iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_{D_0} f \, dV \quad (6.17)$$

Vi tillämpar nu divergenssatsen (6.5) på vektorfältet \mathbf{F} :

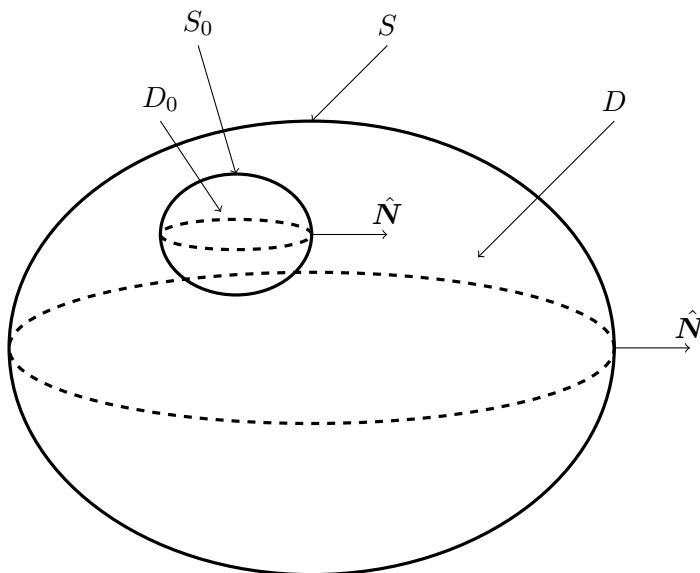
$$\iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_{D_0} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \quad (6.18)$$

vilket leder till

$$\iiint_{D_0} (\nabla \cdot \mathbf{F} - f) \, dV = 0 \quad (6.19)$$

Eftersom $D_0 \subseteq D$ är godtycklig, så måste integranden vara identiskt lika med noll, $\nabla \cdot \mathbf{F} - f = 0$, dvs

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = f \quad \text{i } D \quad (6.20)$$



Figur 6.2: Kropp D med godtycklig delvolym D_0 .

Här har vi använt att en kontinuerlig funktion v som uppfyller att $\iiint_{D_0} v \, dV = 0$ för alla $D_0 \subseteq D$, måste vara identiskt noll, dvs $v = 0$ i D . För om $v(P) \neq 0$, till exempel om $v(P) > 0$, så måste $v > 0$ även i en omgivning av P . Välj då D_0 att vara denna omgivning, så fås $\iiint_{D_0} v \, dV > 0$, vilket strider mot antagandet att $\iiint_{D_0} v \, dV = 0$ för alla D_0 .

Konstitutiv lag: Fouriers lag. Denna lag säger att värmeflödestätheten är proportionell mot temperaturgradienten och att värme strömmar från varmt till kallt. Därför blir flödestätheten

$$\mathbf{F} = -a \nabla u = -a \operatorname{grad} u \quad (6.21)$$

Om vi sätter in detta i (6.20) får vi

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f \quad \text{i } D \quad (6.22)$$

Detta är *värmeledningsekvationen*.

Ekvation (6.22) måste kombineras med ett *randvillkor*, som uttrycker att värmeflödet genom randen är proportionellt mot temperaturdifferensen, plus eventuellt bidrag från värmekällor på randen. Värmeflödestätheten \mathbf{u} genom randen blir då

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = k(u - u_A) - g \quad \text{på } S \quad (6.23)$$

där u är temperaturen på insidan av randytan, u_A är omgivningens temperatur ("ambient temperature"), k är värmeöverföringskoefficienten för det isolerande ytskiktet, och g är tätheten för det föreskrivet inflöde. Enligt Fouriers lag (6.21) har vi

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = -a \nabla u \cdot \hat{\mathbf{N}} = -a D_{\hat{\mathbf{N}}} u \quad \text{på } S \quad (6.24)$$

där $D_{\hat{N}}u = \hat{N} \cdot \nabla u$ betecknar normalderivatan av u , dvs riktningsderivatan i normalriktningen \hat{N} . Därför blir randvillkoret

$$a D_{\hat{N}}u + k(u - u_A) = g \quad \text{på } S \quad (\text{Robins randvillkor}) \quad (6.25)$$

Gränsfallet $k = 0$ svarar mot att begränsningsytan är perfekt isolerad:

$$a D_{\hat{N}}u = g \quad \text{på } S \quad (\text{Neumanns randvillkor}) \quad (6.26)$$

och, om även $g = 0$,

$$D_{\hat{N}}u = 0 \quad \text{på } S \quad (\text{Neumanns randvillkor}) \quad (6.27)$$

Om vi å andra sidan dividerar med k i (6.25),

$$\frac{1}{k} a D_{\hat{N}}u + (u - u_A) = \frac{1}{k} g \quad (6.28)$$

och sedan låter $k \rightarrow \infty$, får vi

$$u = u_A \quad \text{på } S \quad (\text{Dirichlets randvillkor}) \quad (6.29)$$

Gränsfallet $k = \infty$ betyder alltså att begränsningsytan är helt oisolerad, dvs värme kan obehindrat strömma genom ytan och kroppens yttemperatur blir då lika med omgivningens temperatur.

Vi har nu ett *randvärdesproblem*: Finn $u = u(x, y, z)$ sådan att

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) = f & \text{i } D \\ a D_{\hat{N}}u + k(u - u_A) = g & \text{på } S \end{cases} \quad (6.30)$$

Andra beteckningar. I andra böcker betecknas den utåtriktade enhetsnormalen \mathbf{n} eller n och normalderivatan skrivs $\frac{\partial u}{\partial n}$.

6.3 Poissons ekvation

Om a är konstant får vi

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = -a \nabla \cdot \nabla u = -a \Delta u \quad (6.31)$$

där

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6.32)$$

är *Laplace-operatorn*. Värmeledningsekvationen blir då (med $a = 1$)

$$-\Delta u = f \quad \text{i } D \quad (6.33)$$

vilken kallas *Poissons ekvation*. Om $f = 0$ får vi *Laplaces ekvation*:

$$-\Delta u = 0 \quad \text{i } D \quad (6.34)$$

6.4 Svag formulering

Definition 6.1 (Randvärdesproblem, stark form) Finn $u = u(x, y, z)$ sådan att

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) = f & \text{i } D \\ a D_{\hat{N}}u + k(u - u_\Lambda) = g & \text{på } S \end{cases} \quad (6.35)$$

Vi härleder en svag formulering av randvärdesproblemet. Vi multiplicerar med en testfunktion v och integrerar partiellt, dvs vi använder (6.9):

$$\iiint_D f v \, dV = - \iiint_D \nabla \cdot (a\nabla u) v \, dV \quad (6.36)$$

$$= - \iint_S \hat{N} \cdot (a\nabla u) v \, dS + \iiint_D a\nabla u \cdot \nabla v \, dV \quad (6.37)$$

I flödesintegralen använder vi randvillkoret:

$$\hat{N} \cdot (a\nabla u) = a \hat{N} \cdot \nabla u = a D_{\hat{N}}u = g - k(u - u_\Lambda) \quad (6.38)$$

Det leder till

$$\iiint_D f v \, dV = - \iint_S g v \, dS + \iint_S k u v \, dS - \iint_S k u_\Lambda v \, dS + \iiint_D a\nabla u \cdot \nabla v \, dV \quad (6.39)$$

Vi samlar termer med u i vänsterledet:

$$\iiint_D a\nabla u \cdot \nabla v \, dV + \iint_S k u v \, dS = \iiint_D f v \, dV + \iint_S (g + k u_\Lambda) v \, dS \quad (6.40)$$

Definition 6.2 (Randvärdesproblem, svag form) Finn $u = u(x, y, z)$ sådan att

$$\iiint_D a\nabla u \cdot \nabla v \, dV + \iint_S k u v \, dS = \iiint_D f v \, dV + \iint_S (g + k u_\Lambda) v \, dS \quad (6.41)$$

för alla testfunktioner v .

Dirichlets randvillkor (6.29) är speciellt: om $u = u_\Lambda$ på en del S_1 av randen S (eventuellt hela S), så skriver vi ut det explicit i den starka formuleringen:

Definition 6.3 (Randvärdesproblem, stark form) Finn $u = u(x, y, z)$ sådan att

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) = f & \text{i } D \\ u = u_A & \text{på } S_1 \\ a D_{\mathcal{N}} u + k(u - u_A) = g & \text{på } S_2 \end{cases} \quad (6.42)$$

Här är S_2 resten av S , dvs $S_2 = S \setminus S_1$. Det betyder att $S = S_1 \cup S_2$ delas upp i icke överlappande delar. I detta fall måste vi välja testfunktioner v med $v = 0$ på S_1 . Den svaga formuleringen blir då:

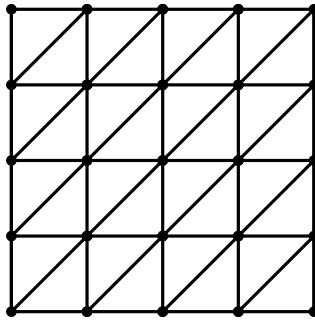
Definition 6.4 (Randvärdesproblem, svag form) Finn $u = u(x, y, z)$ med $u = u_A$ på S_1 och sådan att

$$\iiint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, dV + \iint_{S_2} kuv \, dS = \iiint_D f v \, dV + \iint_{S_2} (g + ku_A) v \, dS \quad (6.43)$$

för alla testfunktioner v med $v = 0$ på S_1 .

6.5 Finita elementmetoden i 2-D

Låt D vara ett område i planet och skapa ett triangulärt beräkningsnät i D , figur 6.3.



Figur 6.3: Triangulärt beräkningsnät i plant område D .

Nätet består av

$$N \text{ punkter } \{P_i\}_{i=1}^N, \quad (6.44)$$

$$M \text{ trianglar } \{T_j\}_{j=1}^M, \quad (6.45)$$

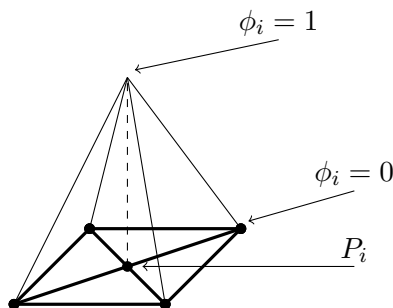
$$L \text{ kanter (edges) } \{E_l\}_{l=1}^L \quad (6.46)$$

En *kontinuerlig och styckvis linjär funktion* $U(x, y)$ är av formen $U(x, y) = a + bx + cy$ inuti varje triangel och hopskarvad till en kontinuerlig funktion. En sådan funktion bestäms entydigt av sina nodvärden $U(P_i)$:

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x, y), \quad U_i = U(P_i) \quad (6.47)$$

Basfunktionerna $\{\phi_i\}_{i=1}^N$, figur 6.4, är kontinuerliga styckvis linjära funktioner och bestäms av

$$\phi_i(P_j) = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j \\ 0, & \text{om } i \neq j \end{cases} \quad (6.48)$$



Figur 6.4: Basfunktion ("pyramidfunktion").

Hur ska vi bestämma de okända nodvärdena $U_i = U(P_i)$ så att $U(x, y) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x, y)$ blir en approximativ lösning till randvärdesproblemet? Vi kan inte sätta in U i den ursprungliga formuleringen (6.35) för U har inte två derivator. Istället använder vi den svaga formuleringen, se (6.41),

$$\iint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, dA + \int_C k u v \, ds = \iint_D f v \, dA + \int_C (g + k u_\Lambda) v \, ds \quad (6.49)$$

för alla testfunktioner v . Eftersom vi nu arbetar i planet har vi bytt ut volymselementet $dV = dx \, dy \, dz$ mot areaelementet $dA = dx \, dy$ och istället för en ytintegral över randen har vi en kurvintegral längs randkurvan C till området D . Se även Gauss divergenssats i planet, sats 5.6.

Här sätter vi in $U(x, y) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x, y)$ och $v = \phi_j$. För enkelhets skull genomför vi detta endast för fallet $k = 0, g = 0$. Vi får

$$\iint_D a \nabla \left(\sum_{i=1}^N U_i \phi_i \right) \cdot \nabla \phi_j \, dA = \iint_D f \phi_j \, dA, \quad j = 1, \dots, N \quad (6.50)$$

Vi bryter ut koefficienterna U_i :

$$\sum_{i=1}^N U_i \underbrace{\iint_D a \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dA}_{=a_{ji}} = \underbrace{\iint_D f \phi_j \, dA}_{=b_j}, \quad j = 1, \dots, N \quad (6.51)$$

Detta är på formen

$$\sum_{i=1}^N a_{ji} U_i = b_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (6.52)$$

dvs ett linjärt ekvationssystem för U_i . Vi skriver på matrisform:

$$AU = b \quad (6.53)$$

med

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

och *styvhetsmatrisen* (*stiffness matrix*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}, \quad a_{ji} = \iint_D a \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dA \quad (6.55)$$

och *lastvektorn* (*load vector*)

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad b_j = \iint_D f \phi_j \, dA \quad (6.56)$$

Matrisen A är

- *symmetrisk*: $A = A^T$ ($a_{ij} = a_{ji}$),
- *stor*: $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ och antalet noder N är stort (vi kan ha $N = 10^3$ eller mer),
- *gles* (*sparse*): de flesta matriselementen $a_{ij} = 0$. Vi har ju $a_{ij} \neq 0$ endast då motsvarande noder P_i och P_j är grannar.

PDE Toolbox. MATLAB-programmet PDE Toolbox ställer upp och löser ekvationssystemet $AU = b$, se datorövningar.

6.6 Problem

6.1 Randvärdesproblem

Problem 6.1 (a) Skriv ned randvärdesproblemet för värmeledning i kvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, med värmeledningskoefficienten 3, källtätheten 2 och omgivande temperaturen 10 på alla sidor. På sidan $y = 0$ har vi värmeöverföringskoefficienten 7 medan övriga sidor har oändligt stor värmeöverföringskoefficient. Inga värmekällor på randen.
 (b) Skriv ned den svaga formen av detta randvärdesproblem.

Problem 6.2 Samma som i Problem 6.1 men med värmeledningskoefficienten $1 + xy$, inga värmekällor, omgivande temperaturen 10 överallt, ytskiktets värmeöverföringskoefficient 0 för $x = 0$, och 7 för $x = 1$, och oändligheten för $y = 0$ och $y = 1$.

Problem 6.3 Skriv ned den svaga formuleringen av
 (a)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) + cu = f & \text{i } D \\ u = u_A & \text{på } S \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{i } D \\ u = u_A & \text{på } S_1 \\ D_{\hat{N}} u = g & \text{på } S_2 \end{cases}$$

där $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$ och $S = S_1 \cup S_2$ (ej överlappande).

6.2 FEM i 2-D

Problem 6.4 (a) Skriv ned finita elementbasfunktionerna ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 för ett nät som består av en enda triangel T med hörnen $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$.
 (b) Beräkna motsvarande styvhetsmatris $a_{ij} = \iint_T \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \, dy$.

Appendix A: Grekiska alfabetet

Lilla grekiska alfabetet

α	β	γ	δ	ϵ	ζ
alpha	beta	gamma	delta	epsilon	zeta
η	θ	ι	κ	λ	μ
eta	theta	iota	kappa	lambda	mu
ν	ξ	\omicron	π	ρ	σ
nu	xi	omicron	pi	rho	sigma
τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω
tau	upsilon	phi	chi	psi	omega

Bokstäverna ϵ , θ , σ och ϕ finns också i varianterna ϵ , ϑ , ς och φ .

Stora grekiska alfabetet

A	B	Γ	Δ	E	Z
Alfa	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta
H	Θ	I	K	Λ	M
Eta	Theta	Iota	Kappa	Lambda	Mu
N	Ξ	O	Π	P	Σ
Nu	Xi	Omicron	Pi	Rho	Sigma
T	Y	Φ	X	Ψ	Ω
Tau	Upsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

Appendix B: Programmering

Bokens datorövningar kan lösas i MATLAB eller valfritt programmeringsspråk (Fortran, C, C++, C#, Java, Python, Julia, Haskell, ...). Här sammanfattas några vanliga kommandon som kan vara användbara för att lösa bokens datorövningar i Python eller MATLAB. Python-modulen `pylab`¹ ger tillgång till funktionalitet liknande den i MATLAB. Detta gör att många av de kommandon som krävs för att lösa bokens datorövningar är identiska i MATLAB och Python.

Uppstart

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>from pylab import *</code>	
<i>Placeras först i scriptet</i>	<i>Kräver ingen import av extra funktionalitet</i>

Visa plottar

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>show()</code>	
<i>Placeras sist i scriptet</i>	<i>Kräver inget kommando; plottar visas direkt</i>

Iterera ett givet antal gånger

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>for n in range(10):</code> ... <code>end</code>	<code>for n=1:10</code> ... <code>end</code>
<i>Itererar över $n = 0, 1, \dots, 9$</i>	<i>Itererar över $n = 1, 2, \dots, 10$</i>

Upprepa så länge ett villkor är uppfyllt

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>while condition:</code> ... <code>end</code>	<code>while condition</code> ... <code>end</code>
<i>Upprepar så länge <code>condition</code> är uppfyllt</i>	<i>Upprepar så länge <code>condition</code> är uppfyllt</i>

1. Python-modulen `pylab` kombinerar de två Python-modulerna `numpy` och `matplotlib`, vilka ger tillgång till vektorer och matriser (arrayer) och plottning.

Definiera villkorssatser

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>if condition0: ... elif condition1: ... else: ...</pre>	<pre>if condition1 ... elseif condition2 ... else ... end</pre>

Definiera funktioner

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>def foo(x): ... y = ... return y</pre>	<pre>function y = foo(x) ... y = ...; end</pre>
	<i>Måste läggas i fil med namn foo.m</i>

Skapa linjär vektor (array) med x -värden

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>x = linspace(a, b, 101)</pre>	<pre>x = linspace(a, b, 101);</pre>
<i>Ger 101 punkter och 100 intervall</i>	<i>Ger 101 punkter och 100 intervall</i>

Skapa logaritmisk vektor (array) med x -värden

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>x = logspace(-16, 16, 33)</pre>	<pre>x = logspace(-16, 16, 33);</pre>
<i>Ger 33 punkter mellan 1×10^{-16} och 1×10^{16}</i>	<i>Ger 33 punkter mellan 1×10^{-16} och 1×10^{16}</i>

Plotta en funktion

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>plot(x, y)</pre>	<pre>plot(x, y)</pre>

Sätta axelmarkörer och titlar

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>title('y = f(x)')</code>	<code>title('y = f(x)')</code>
<code>xlabel('x')</code>	<code>xlabel('x')</code>
<code>ylabel('y')</code>	<code>ylabel('y')</code>
<i>Använd '\$x\$' för L^AT_EX-notation</i>	

Anpassa linjärt polynom till punkter

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>p = polyfit(x, y, 1)</code>	<code>p = polyfit(x, y, 1);</code>
<i>Polynomet ges av $p[0]*x+p[1]$</i>	<i>Polynomet ges av $p(1)*x+p(2)$</i>

Evaluera polynom i punkter

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>y = polyval(p, x)</code>	<code>y = polyval(p, x);</code>

Spara plot till fil

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>savefig('foo.png')</code>	<code>print('foo', '-dpng')</code>
<code>savefig('foo.pdf')</code>	<code>print('foo', '-pdf')</code>

.1 Kapitel 1

.1.1 Övningar

Ö1.1 —

Ö1.2 —

Ö1.3 Inre punkt, yttre punkt, randpunkt, öppen, sluten, begränsad:

(a) (1, 1), (0, 0), (1, 0), ja, nej, nej

(b) (1, 0), (0, 1), (0, 0), nej, ja, ja

(c) (3, 0), (3/2, 0), (1, 0), nej, nej, nej

(d) (1, 0), saknas, (0, 0), ja, nej, nej

Ö1.4 (a) 0 (b) saknas (titta på $f(x_1, 0)$ och $f(0, x_2)$)

(c) 0 (d) saknas (titta på $x_2 = -x_1 + kx_1^2$)

Ö1.5 (a) existerar, (b) existerar ej

Ö1.6 $\mathcal{D}(f) = \{x : x_1 \neq x_2\}$, $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$ (titta på $f(x_1, 0)$ och $f(1, -1)$)

Ö1.7 (a) 3/5, (b) -4/5, (c) 9/125

Ö1.8 27/8

Ö1.9 -3/20

Ö1.10 (a)

$$f'(x) = [-e^{-x_1} \sin(x_2), e^{-x_1} \cos(x_2)]$$

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

(b)

$$f'(x) = [2x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3]$$

$$\begin{aligned} L_{\bar{x}}[f](x) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = 3 + [2 \quad 2 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 1 \end{bmatrix} \\ &= -3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

(c)

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ x_2 & -1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

Ö1.11 (a)

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \cos(x_1) & -\sin(x_2) \\ -\sin(x_1) & \cos(x_2) \end{bmatrix}$$

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ e^{x_2} & x_1 e^{x_2} \end{bmatrix}$$

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 + e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

Ö1.12 (a)

$$f'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$L_{\bar{t}}[f](t) = f(\bar{t}) + f'(\bar{t})(t - \bar{t}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} (t - \pi/2)$$

(b)

$$f'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}$$

$$L_{\bar{t}}[f](t) = f(\bar{t}) + f'(\bar{t})(t - \bar{t}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ö1.13 (a) att göra

(b) att göra

Ö1.14 (a) Lösningarna ges av

$$f(u) = \begin{bmatrix} u_2(1 - u_1^2) \\ 2 - u_1 u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi finner två lösningar: $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\bar{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(b) Jacobi-matrisen är

$$Df(u) = \begin{bmatrix} -2u_1u_2 & 1 - u_1^2 \\ -u_2 & -u_1 \end{bmatrix}$$

(c) Första steget av Newtons metod:

$$\text{Beräkna } A = Df(1, 1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad b = -f(1, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Lös } Ah = b, \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2h_1 = 0, \\ -h_1 - h_2 = -1, \end{cases} \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Uppdatera } u^{(1)} = u^{(0)} + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \bar{u}$$

Bingo! Vi hittade en av lösningarna.

Ö1.15 (a) Lösningarna ges av

$$f(u) = \begin{bmatrix} u_1(1 - u_2) \\ u_2(1 - u_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi finner två lösningar $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Jacobi-matrisen är:

$$Df(u) = \begin{bmatrix} 1 - u_2 & -u_1 \\ -u_2 & 1 - u_1 \end{bmatrix}$$

(c) Första steget av Newtons metod:

$$\text{Beräkna } A = Df(2, 2) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad b = -f(2, 2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Lös } Ah = b, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -h_1 - 2h_2 = 2, \\ -2h_1 - h_2 = 2, \end{cases} \quad h = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Uppdatera } u^{(1)} = u^{(0)} + h = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

Vi närmar oss en av lösningarna \bar{u} .

Ö1.16 (a) 0 (b) $2t(1 - t^2)e^{-t^2}$

Ö1.17 (a) $\partial f/\partial u = (u + v)(u - v)^2(5u + v)$, $\partial f/\partial v = -(u + v)(u - v)^2(u + 5v)$
 (b) $\partial f/\partial u = 28(v - u)$, $\partial f/\partial v = 14(2u - v)$

Ö1.18 (a) $L_f = 2$
 (b) $L_f = 20$, se exempel 1.17, $|x_i| \leq 1$ i $B_1(0)$, så att $\max |f'_{i,j}(x)| = 5$, $m = n = 2$

Ö1.19 (a) $f''_{13}(x, y, z) = 4xy^2ze^{x^2y^2} \sin(z^2)$
 (b) $f''_{32}(x, y, z) = 4x^2yz e^{x^2y^2} \sin(z^2)$
 (c) $f'''_{113}(x, y, z) = 4y^2z(1 + 2x^2y^2)e^{x^2y^2} \sin(z^2)$
 (d) $f'''_{131}(x, y, z) = 4y^2z(1 + 2x^2y^2)e^{x^2y^2} \sin(z^2)$

Ö1.20

$$\begin{aligned} P_2[f, \bar{x}](x) &= f(1, 1) + f'(1, 1)h + \frac{1}{2}h^T f''(1, 1)h \\ &= 1 + [2 \quad 1] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [h_1 \quad h_2] \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ \text{där } h &= \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ö1.21

$$\begin{aligned} P_2[f, \bar{x}](x) &= f(1, 1, 1) + f'(1, 1, 1)h + \frac{1}{2}h^T f''(1, 1, 1)h \\ &= -\frac{5}{3} + [-3 \quad -2 \quad 2] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [h_1 \quad h_2 \quad h_3] \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \\ \text{där } h &= \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ö1.22 $P_2[f, \bar{x}](x, y) = 3 + 2x - 2x^2 - 4x(y - 1) - (y - 1)^2$

Ö1.23 Kom ihåg att normera riktningsvektorn, $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

(a) $\nabla f(1, 1) = (\cos 1, -\cos 1)$, $D_{\mathbf{u}}(1, 1) = \frac{\cos 1}{\sqrt{5}}$
 (b) $\nabla f(-1, 0, 2) = (1, -1, 1)$, $D_{\mathbf{u}}(-1, 0, 2) = 1$
 (c) $\nabla f(-1, 0, 2) = (1, -1, 1)$, $D_{\mathbf{u}}(-1, 0, 2) = 0$
 (d) $\nabla f(7, 2) = (14, -24)$, $D_{\mathbf{u}}(7, 2) = -5\sqrt{2}$

Ö1.24 7 respektive -7

.1.2 Problem

P1.1 $f'(x) = A$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$

P1.2 Med hjälp av kedjeregeln för funktioner av en variabel får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xF(y/x)) = F(y/x) + xF'(y/x)\frac{-y}{x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xF(y/x)) = xF'(y/x)\frac{1}{x}\end{aligned}$$

så att

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = xF(y/x) - yF'(y/x) + yF'(y/x) = u$$

P1.3 Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot 2 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot (-1)\end{aligned}$$

Detta sättes in i differentialekvationen, som då blir $\frac{\partial F}{\partial u} = x + y$. Men $u = x, v = 2x - y$ innebär att $x = u, y = 2u - v$ vilket ger

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 3u - v$$

Integration med avseende på u (med v konstant) ger

$$F = \frac{3}{2}u^2 - uv + g(v)$$

där $g(v)$ är en godtycklig funktion som bara beror på v . Som funktion av x, y blir detta

$$F(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - x(2x - y) + g(2x - y)$$

Funktionen g bestäms av randvillkoret $F = x^2$ för $y = 0$. Insättning av detta i F ger efter en enkel räkning $g(2x) = \frac{3}{2}x^2$, dvs $g(t) = \frac{3}{8}t^2$. Till slut

$$F(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - x(2x - y) + \frac{3}{8}(2x - y)^2 = \frac{1}{8}(8x^2 - 4xyy) + 3y^2$$

P1.4 Att göra.

P1.4 Att göra.

P1.5 Att göra.

P1.6 Tips:

(a) — (b) $\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

(c) Beräkna först u''_{xx} . Sedan fås u''_{yy} och u''_{zz} genom att x bytes mot y respektive z .

P1.10 —

P1.11 Tips: $f(r) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

P1.12 $\pi/2$

P1.13 —

.2 Kapitel 2

.2.1 Övningar

Ö2.1 $f(x) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{8}{x_1} - x_2$. Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} x_2^{-1} - 8x_1^{-2} \\ -x_1x_2^{-2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En kritisk punkt $x = (-4, 2)$. Hesse-matrisen är

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 16x_1^{-3} & -x_2^{-2} \\ -x_2^{-2} & 2x_1x_2^{-3} \end{bmatrix}$$

I den kritiska punkten:

$$f''(-4, 2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

$f''(-4, 2)$ har egenvärdena $(-5 \pm \sqrt{13})/8 < 0$, lokalt maximum.

Ö2.2 $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2$. Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} f'_{x_1}(x) \\ f'_{x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den andra ekvationen ger $x_1 = 2x_2$ vilket insättes i den första ekvationen: $12x_2^2 - x_2 = 0$, vilken har två lösningar $x_2 = 0$ och $x_2 = 1/12$. Vi har alltså två stationära punkter nämligen $(0, 0)$ och $(1/6, 1/12)$. Hessematrisen är

$$f''(x) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

I de två punkterna får vi $f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $1 \pm \sqrt{2}$, så att matrisen är indefinit, och $f''(1/6, 1/12) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $(3 \pm \sqrt{5})/2$, så att matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(0, 0)$ är en sadelpunkt och att $(1/6, 1/12)$ är en minimipunkt.

Ö2.3

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2$$

Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} x_1^2 - 4x_2 \\ 2x_2 - 4x_1 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De kritiska punkterna är $x = (0, 0, 0)$ och $x = (8, 16, 0)$. Hesse-matrisen är

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

I den ena kritiska punkten:

$$f''(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $1 \pm \sqrt{17}$, 2, olika tecken, sadelpunkt.

I den andra kritiska punkten:

$$f''(8, 16, 0) = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $9 \pm \sqrt{65}$, 2, alla positiva, lokalt minimum.

Ö2.4

Inga singulära punkter, inga randpunkter. Kritiska punkter ges av

$$f'(x, y)^T = \begin{bmatrix} 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ 6xy - 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De kritiska punkterna är $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$ och $(-2, -1)$. Hesse-matrisen är

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}$$

Vi beräknar egenvärdena till Hesse-matrisen i de fyra kritiska punkterna. Vi finner

- (1, 2) sadelpunkt
- (2, 1) minimipunkt
- (-1, -2) sadelpunkt
- (-2, -1) maximipunkt

Ö2.5 Maximum 0 i punkten (0, 0), minimum -2 i punkten (0, 2).

Ö2.6 Maximum 3 i punkten (5/7, 9/14), minimum 3/28 i punkten (0, -1). Tips: kritisk punkt (1, 1) är yttre punkt därför ointressant. Rand 1: $x = 0, -1 \leq y \leq 1$, max 3 i $y = -1$, min 3/4 i $y = 1/2$. Rand 2: $y = 1 - x/2, 0 \leq x \leq 2$, max 3 i $x = 2$, min 3/28 i $x = 5/7$. Rand 3: $y = -1 + x/2, 0 \leq x \leq 2$, max 3, min 9/4.

Ö2.7 Max 7, min 0. (Rättad.)

Ö2.8 $4\sqrt{2}/9$

Ö2.9 \sqrt{n}

Ö2.10 $(S/6)^{3/2}$

Ö2.11 $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, y = \pm 1, z = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \lambda = -1$

Ö2.12 Min 0 i origo, max $4\sqrt{5}/125$ i (2/5, 2/5, 1/5).

.2.2 Problem

P2.1 $a = 1, b = -1/6$. Tips: skriv $f(a, b) = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ och utveckla kvadraten.

P2.2 (2, 2, 1) och (-2, -2, 1). Tips: kvadraten på avståndet till origo är $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (5 - xy)^2$.

P2.3 (a) Tex $x = 0, y = 18, z = 2$.
(b) $x = y = 5, z = 10$.

Tips: $f(x, y) = xyz^2 = (20 - y - z)yz^2$ med $y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq 20$.

P2.4 $\mathcal{R}(f) = [-2\sqrt{3}/9, 2\sqrt{3}/9]$. Tips: dra en rät linje i $\mathcal{D}(f)$ från minpunkten till maxpunkten. Funktionen är kontinuerlig längs denna linje och antar alla värden mellan sitt maximum och minimum enligt satsen om mellanliggande värden för envariabelfunktioner, sats 6.2 i del I.

P2.5 $\mathcal{R}(f) = [-1, 13]$. Se tips till problem 2.4.

P2.6 —

P2.7

$$L''(x, \lambda) = \begin{bmatrix} f''_{11}(x) + \lambda g''_{11}(x) & \dots & f''_{1n}(x) + \lambda g''_{1n}(x) & g'_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f''_{n1}(x) + \lambda g''_{n1}(x) & \dots & f''_{nn}(x) + \lambda g''_{nn}(x) & g'_n(x) \\ g'_1(x) & \dots & g'_n(x) & 0 \end{bmatrix}$$

.3 Kapitel 3**.3.1 Problem****P3.1** Finn u sådan att $u(0) = 0$ och

$$\int_0^L EA u' v' dx = \int_0^L K_x A v dx + P v(L) \quad \text{för alla } v \text{ med } v(0) = 0$$

P3.2 Finn $u = u$ sådan att $u(L) = 0$ och

$$\int_0^L u' v' dx + u(0)v(0) = \int_0^L f v dx + g_0 v(0) \quad \text{för alla } v \text{ med } v(L) = 0$$

P3.3 Finn $w = w$ sådan att $w(0) = w(L) = 0$ och

$$\int_0^L EI w'' v'' dx = \int_0^L q v dx \quad \text{för alla } v \text{ med } v(0) = v(L) = 0$$

P3.4 $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ **P3.5** $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ **P3.6** $u(x) = (u_L - u_0)\frac{x}{L} + u_0$, $j(x) = -au'(x) = a(u_0 - u_L)\frac{1}{L}$ (rättelse)

Obs att flödestätheten blir konstant och proportionell mot temperaturskillnaden.

P3.7 $w(x) = \frac{1}{24} \frac{qL^4}{EI} \left(\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L} \right)$ **P3.8** En integration ger $u' - \frac{1}{a}u = -\frac{1}{a}(x + C)$. Multiplicera med den integrerande faktorn $e^{-x/a}$ och integrera igen. Lösningen blir $u(x) = x - (e^{x/a} - 1)/(e^{1/a} - 1)$. Plotta med Matlab för några olika värden på a :

```
>> a=1; fplot(@(x) x-(exp(x/a)-1)/(exp(1/a)-1), [0,1]), hold on
>> a=.1; fplot(@(x) x-(exp(x/a)-1)/(exp(1/a)-1), [0,1]), hold on
```

$$\mathbf{P3.9} \quad (\text{a}) \quad u(x) = \frac{L^2 f}{a_0} \left(1 - \frac{x}{L} + 2 \ln \left(\frac{x}{L} \right) \right)$$

$$(\text{b}) \quad j(x) = -a(x) Du(x) = -fL \left(2 - \frac{x}{L} \right) \quad [\text{J}/(\text{m}^2 \text{s})]$$

$j(L) = -fL$, flöde åt vänster, dvs utåt.

$j(2L) = 0$, inget flöde, perfekt isolering.

Värme flödar in med konstant källtätet f inuti plattan och flödar ut vid vänstra randen.

$$\mathbf{3.10} \quad u(x) = \frac{PL}{EA_0 L} x \left(1 + \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

$$\Delta L = u(L) = \frac{PL}{EA_0} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma \right), \quad \gamma = 2 \left(\frac{EA_0 \Delta L}{P L} - 1 \right)$$

.4 Kapitel 4

.4.1 Övningar

Ö4.1 Vi kan ta $\{x_i\}_{i=0}^4 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, $\{y_j\}_{j=0}^4 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, så att $\Delta x_i = \Delta y_j = \frac{1}{4}$. Vi kan evaluera i rektanglarnas mittpunkter $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) = (\frac{2i-1}{8}, \frac{2j-1}{8})$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Vi får

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{2i-1}{8} \frac{2j-1}{8} \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{16 \cdot 16}{64} \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

vilket råkar vara integralens exakta värde.

$$\mathbf{Ö4.2} \quad (\text{a}) \frac{1}{4} \quad (\text{b}) \frac{8}{15} (2\sqrt{2} - 1) \quad (\text{c}) \frac{2}{3} \quad (\text{d}) \ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$\mathbf{Ö4.3} \quad (\text{a}) \frac{4}{3} \quad (\text{b}) \frac{1}{10} \ln(2) \quad (\text{c}) \pi \quad (\text{d}) (1 + 3e^4)/16$$

$$\mathbf{Ö4.4} \quad \int_{-2}^4 \left(\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy \, dx \right) dy = 36$$

$$\text{eller} \quad \int_{-3}^{-1} \left(\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \right) dx + \int_{-1}^5 \left(\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \right) dx = 36$$

$$\mathbf{Ö4.5} \quad \frac{31}{8}$$

$$\mathbf{Ö4.6} \quad (\text{a}) \quad \int_0^1 \left(\int_x^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$(\text{b}) \quad \int_0^1 \left(\int_0^{\arccos(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\mathbf{Ö4.7} \quad (\text{a}) (e^9 - 1)/6 \quad (\text{b}) \frac{1}{3} \ln(9)$$

Ö4.8 Vi har $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. I polära koordinater blir området en rektangel $R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

$$\begin{aligned} \iint_D (3x + 4y^2) dx dy &= \iint_R (3r \cos(\theta) + 4r^2 \sin^2(\theta)) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\int_1^2 (3r \cos(\theta) + 4r^2 \sin^2(\theta)) r dr \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[r^3 \cos(\theta) + r^4 \sin^2(\theta) \right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\ &= \int_0^\pi (7 \cos(\theta) + 15 \sin^2(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^\pi (7 \cos(\theta) + \frac{15}{2}(1 - \cos(2\theta))) d\theta = \frac{15\pi}{2} \end{aligned}$$

Ö4.9

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{r^2} r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b \sin^2(\theta) r dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) d\theta \int_a^b r dr = \frac{1}{2}\pi(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

Ö4.10 D ges av $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ dvs $x^2 + y^2 \leq 2y$. I polära koordinater blir detta $r^2 \leq 2r \sin(\theta)$, dvs $r \leq 2 \sin(\theta)$. $E = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2 \sin(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi\}$, rita figur!

$$\begin{aligned} \iint_D f dA &= \iint_E \sqrt{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \left(\int_0^{2 \sin(\theta)} r^2 dr \right) d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3(\theta) d\theta = \frac{32}{9} \end{aligned}$$

där vi slagit upp integralen $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3(\theta) d\theta = \frac{2}{3}$ i en tabell.

Ö4.11 $u = x + y, v = x - 2y, R = [0, 3] \times [1, 4], x = \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v, y = \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}v$
 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{3}, dx dy = \frac{1}{3} du dv$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{x-2y} dx dy &= \iint_R \frac{\frac{1}{3}(u-v)}{v} \frac{1}{3} du dv \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 \left(\int_1^4 \left(\frac{u}{v} - 1 \right) du \right) dv = \ln(2) - 1 \end{aligned}$$

Ö4.12 $D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 2, 2 \leq x^2y \leq 4\}, u = xy, v = x^2y$
 $x = v/u, y = u^2/v, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -1/v, dx dy = \frac{1}{v} du dv, R = [1, 2] \times [2, 4]$

$$\text{area}(D) = \iint_D dx dy = \iint_R \frac{1}{v} du dv = \ln(2)$$

Ö4.13 (a) Positiv integrand, upprepad integration tillåten.

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{S \rightarrow \infty} \int_0^R x \exp(-x^2) dx \int_0^S \exp(-y^2) dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \exp(-x^2) \right]_0^R \lim_{S \rightarrow \infty} \int_0^S \exp(-y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-y^2) dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \exp(-y^2) dy \sqrt{\pi} = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

enligt (4.91). Konvergent med värdet $\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$.

(b) Positiv integrand, upprepad integration tillåten. Använd polära koordinater. Divergent mot $+\infty$.

Ö4.14 (a) 27 (b) $\frac{1}{24}$ (c) $\frac{9\pi}{8}$

Ö4.15 $\frac{128\pi}{15}$. Tips. Enkelt i y :

$$\iint_{B_4} \left(\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2+z^2} dy \right) dx dz$$

eller skivmetoden:

$$\int_0^4 \left(\iint_{B_{\sqrt{y}}} \sqrt{x^2+z^2} dx dz \right) dy$$

där B_R cirkelskiva med radie R .

Ö4.16 $\frac{4\pi}{3} R^3$ Tips: sfäriska koordinater.

Ö4.17 $V = 64$. Substitution: $u = xy, v = xz, w = yz, dV = \frac{1}{2\sqrt{uvw}} du dv dw$.

Ö4.18 Sfäriska koordinater: $E = [0, 1] \times [0, \pi/4] \times [0, 2\pi]$

$$\iiint_E \rho \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta = \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/4} \sin(\phi) d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = \pi(2 - \sqrt{2})/4$$

Ö4.19 $\frac{12\pi}{5}$. Tips: cylindriska koordinater.

Ö4.20 $\frac{\pi}{8}$

Ö4.21 $\frac{1688\pi}{15}$

Ö4.22 $\frac{\pi}{8}$

Ö4.23 $M = ka^3, \bar{\mathbf{r}} = (7a/12, 7a/12, 7a/12)$, enheter a [m], k [kg/m³].

Ö4.24 $\frac{1}{2} \pi dh R^4$

Ö4.25 $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} dL^5$

.4.2 Problem

P4.1 Med $u = x/L, v = y/L$ får vi

$$\begin{aligned} M &= k \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \int_0^L \frac{1}{(y/L)^2 + 3} dy = kL^2 \int_0^1 u^2 du \int_0^1 \frac{1}{v^2 + 3} dv \\ &= kL^2 \frac{1}{3} \frac{\text{atan}(1/\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = kL^2 \frac{1}{3} \frac{\pi/6}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{54} kL^2 \quad [\text{kg}] \end{aligned}$$

P4.2 Använd (4.21), (4.24), (4.25).

P4.3 En tetraeder med hörn i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

.5 Kapitel 5

.5.1 Övningar

- Ö5.1** (a) $x = -2t, y = 1, z = \pi/2 + t; \quad t \in \mathbb{R}$
 (b) $x = 1, y = t, z = 2t; \quad t \in \mathbb{R}$
 (c) $x = 3 + t, y = 9 + 6t; \quad t \in \mathbb{R}$
 (d) $x = -1, y = 4t, z = \pi^2 + 2\pi t; \quad t \in \mathbb{R}$

Ö5.2 (a) $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ (b) $e - e^{-1}$ (c) $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$

Ö5.3 (a) $2\pi + 2/3$ (b) $\frac{5}{2}\sqrt{42}$ (c) $\frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2$

Ö5.4 (a) $-2/3$ (b) $27/28$

Ö5.5

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^5 \mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt \\ &= \int_1^5 \left((3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} \right) \cdot \left((-3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dt \\ &= \int_1^5 t dt = \left[t^2/2 \right]_1^5 = 12 \end{aligned}$$

Man kan även utnyttja att vektorfältet är konservativt med potentialen $\phi = \frac{1}{2}|\mathbf{r}|^2$, dvs $\mathbf{r} = \nabla\phi = \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{r}|^2$. Då blir integralen

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= \left[\phi \right]_{P_0}^{P_1} = \frac{1}{2} |(3 \cos 5)\mathbf{i} + (3 \sin 5)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}|^2 - \frac{1}{2} |(3 \cos 1)\mathbf{i} + (3 \sin 1)\mathbf{j} + \mathbf{k}|^2 \\ &= \frac{1}{2} ((3 \cos 5)^2 + (3 \sin 5)^2 + 25) - \frac{1}{2} ((3 \cos 1)^2 + (3 \sin 1)^2 + 1) = 12 \end{aligned}$$

Ö5.6 (a) $x + 2y - 2z = -3$ (b) $-x + 2z = 1$

Ö5.7 (a) $\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$ (b) $3\sqrt{14}$

(c) $\sqrt{14}\pi$

(d) $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

Ö5.8 $4\pi/3$

Ö5.9 Sidoytan S_1 : $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2}$. Toppytan S_2 : $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2}$.

Ö5.10 Parametrisering av den buktiga delen S_1 av ytan (cylindriska koordinater, $z = x^2 + y^2 = r^2$, $r = \sqrt{z}$):

$$S_1: \begin{cases} x = \sqrt{z} \cos(\theta), \\ y = \sqrt{z} \sin(\theta), \\ z = z, \end{cases} \quad (\theta, z) \in R = [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

Tangenter:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\sqrt{z} \sin(\theta) \mathbf{e}_x + \sqrt{z} \cos(\theta) \mathbf{e}_y + 0 \mathbf{e}_z$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cos(\theta) \mathbf{e}_x + \frac{1}{2\sqrt{z}} \sin(\theta) \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$$

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \sqrt{z} \cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sqrt{z} \sin(\theta) \mathbf{e}_y - \frac{1}{2} \mathbf{e}_z = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y - \frac{1}{2} \mathbf{e}_z$$

Vi ser att \mathbf{N} pekar utåt (ty $N_z = -\frac{1}{2} < 0$) och

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right) d\theta dz$$

så att flödestätheten blir

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} &= (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z^2 \mathbf{e}_z) \cdot (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y - \frac{1}{2} \mathbf{e}_z) \\ &= x^2 + y^2 - \frac{1}{2} z^2 = z - \frac{1}{2} z^2 \quad \text{på } S_1 \end{aligned}$$

Flödet blir

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \iint_R (z - \frac{1}{2} z^2) d\theta dz = \{\text{Fubini}\} \\ &= \int_0^1 (z - \frac{1}{2} z^2) dz \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = 2\pi/3 \end{aligned}$$

På toppytan S_2 :

$$S_2: \begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta), \\ z = 1, \end{cases} \quad (r, \theta) \in E = [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Parametriseringen behövs inte, vi ser helt enkelt

$$\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z^2\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_z = z^2 = 1$$

så att

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iint_{S_2} dS = \text{area}(S_2) = \pi$$

Alltså blir totala flödet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 2\pi/3 + \pi = 5\pi/3$$

Alternativ parametrisering (bättre?):

$$S_1: \begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta), \\ z = r^2, \end{cases} \quad (r, \theta) \in R = [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Genomför räkningarna!

Ö5.11 Finns ej.

Ö5.12

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 1 + 2z = 2(1 + z)$$

Cylindriska koordinater:

$$E = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq \sqrt{z}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad D = \{(r, z) : 0 \leq r \leq \sqrt{z}\}$$

Divergenssatsen:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS &= \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_D 2(1 + z) \, dV = \iiint_E 2(1 + z) r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \{\text{skivning}\} = \int_0^{2\pi} \left(\iint_D 2(1 + z) r \, dr \, dz \right) d\theta \\ &= \{D \text{ enkel i } r\} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(2(1 + z) \int_0^{\sqrt{z}} r \, dr \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^1 2(1 + z) \frac{z}{2} dz = 2\pi \int_0^1 (z + z^2) dz = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 5\pi/3 \end{aligned}$$

Ö5.13 Gauss divergenssats ger att utflödet är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

Med sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

Volymselementet: $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$. Integranden: $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 1 = 3\rho^2 \sin^2 \phi + 1$. Integralen blir

$$\begin{aligned} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^1 (3\rho^2 \sin^2 \phi + 1) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= 3 \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \int_0^{\pi} \sin^3 \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 3 \frac{1}{5} \frac{4}{3} 2\pi + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{8}{5}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{44}{15}\pi \end{aligned}$$

där vi använt

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \phi \, d\phi = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi \, d\phi = \left\{ s = -\cos \phi \right\} = \int_{-1}^1 (1 - s^2) \, ds = \frac{4}{3}$$

5.2 Problem

P5.1 Tips: derivera båda sidorna i likheten $\|\mathbf{r}(t)\|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$.

5.2

$$M = \int_C \delta \, ds = \int_C k(1 - y/R) \, ds = kR \int_0^{\pi} (1 - \sin(t)) \, dt = kR(\pi - 2) \quad [\text{kg}]$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{M} \int_C y \delta \, ds = \frac{1}{M} \int_C yk(1 - y/R) \, ds \\ &= \frac{1}{kR(\pi - 2)} kR^2 \int_0^{\pi} (\sin(t) - \sin^2(t)) \, dt = R \frac{\pi - 4}{\pi - 2} \quad [\text{m}] \end{aligned}$$

$$\bar{x} = 0 \quad (\text{pga symmetri})$$

5.3 Tips: sätt in (5.170) i integralen och använd $\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{r}'(t)\|^2$.

$$\mathbf{5.4} \quad \iint_{S_1} z \, dS = \frac{3\pi}{2}, \quad \iint_{S_2} z \, dS = 0, \quad \iint_{S_3} z \, dS = \sqrt{2}\pi, \quad \iint_S z \, dS = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$$

.6 Kapitel 6

P6.1 (a) På sidan $y = 0$ har vi $g = 0$ och den utåtriktade normalvektorn $\hat{N} = -\mathbf{e}_y$ så att randvillkoret blir

$$\begin{aligned} aD_{\hat{N}}u + k(u - u_A) &= 3(-\mathbf{e}_y) \cdot \nabla u(x, 0) + 7(u(x, 0) - 10) \\ &= -3 \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} + 7(u(x, 0) - 10) = 0 \end{aligned}$$

Randvärdesproblemet är

$$\begin{cases} -3\Delta u(x, y) = 2 & \text{för } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 10 \\ -3 \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} + 7(u(x, 0) - 10) = 0 \end{cases}$$

där $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$.

(b) Finn $u = u(x, y)$ sådan att $u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 10$ och

$$\begin{aligned} 3 \int_0^1 \int_0^1 \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) \, dx \, dy + 7 \int_0^1 u(x, 0)v(x, 0) \, dx \\ = 2 \int_0^1 \int_0^1 v(x, y) \, dx \, dy + 70 \int_0^1 v(x, 0) \, dx \end{aligned}$$

för alla testfunktioner $v = v(x, y)$ med $v(x, 1) = v(0, y) = v(1, y) = 0$.

P6.2 (a) På sidan $x = 0$ har vi $a = 1 + xy = 1, g = 0, k = 0$ och den utåtriktade normalvektorn $\hat{N} = -\mathbf{e}_x$ så att randvillkoret blir

$$aD_{\hat{N}}u + k(u - u_A) = (-\mathbf{e}_x) \cdot \nabla u(0, y) = -\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0$$

På sidan $x = 1$ har vi $a = 1 + xy = 1 + y, g = 0, k = 7$ och den utåtriktade normalvektorn $\hat{N} = \mathbf{e}_x$ så att randvillkoret blir

$$\begin{aligned} aD_{\hat{N}}u + k(u - u_A) &= (1 + y)\mathbf{e}_x \cdot \nabla u(1, y) + 7(u(1, y) - 10) \\ &= (1 + y) \frac{\partial u(1, y)}{\partial x} + 7(u(1, y) - 10) = 0 \end{aligned}$$

Randvärdesproblemet är

$$\begin{cases} -\nabla \cdot ((1 + xy)\nabla u(x, y)) = 0 & \text{för } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 10 \\ \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0 \\ (1 + y) \frac{\partial u(1, y)}{\partial x} + 7(u(1, y) - 10) = 0 \end{cases}$$

(b) Finn $u = u(x, y)$ sådan att $u(x, 0) = u(x, 1) = 10$ och

$$\int_0^1 \int_0^1 (1 + xy) \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) \, dx \, dy + 7 \int_0^1 u(1, y) v(1, y) \, dy = 70 \int_0^1 v(1, y) \, dy$$

för alla testfunktioner $v = v(x, y)$ med $v(x, 0) = v(x, 1) = 0$.

P6.3 (a) Finn $u = u(x, y, z)$ med $u = u_A$ på S och

$$\iiint_D (a \nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dV = \iiint_D f v \, dV$$

för alla testfunktioner $v = v(x, y, z)$ med $v = 0$ på S .

(b) Finn $u = u(x, y, z)$ med $u = u_A$ på S_1 och

$$\iiint_D \nabla u \cdot \nabla v \, dV = \iint_{S_2} g v \, dS$$

för alla testfunktioner $v = v(x, y, z)$ med $v = 0$ på S_1 .

P6.4 (a) Basfunktionerna är av formen $\phi(x, y) = a + bx + cy$ och lika med 1 en av noderna och 0 i de övriga. Vi får

$$\phi_1(x, y) = 1 - x - y, \quad \phi_2(x, y) = x, \quad \phi_3(x, y) = y$$

(b)

$$\nabla \phi_1(x, y) = -\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y, \quad \nabla \phi_2(x, y) = \mathbf{e}_x, \quad \nabla \phi_3(x, y) = \mathbf{e}_y$$

$$a_{11} = \iint_T \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1 \, dx \, dy = \iint_T 2 \, dx \, dy = 2 \, \text{area}(T) = 1$$

$$a_{12} = \iint_T \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 \, dx \, dy = \iint_T (-1) \, dx \, dy = -\text{area}(T) = -\frac{1}{2}$$

och så vidare. Styvhetsmatrisen är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sakregister

- def, 156
- elif, 156
- elseif, 156
- for, 155
- if, 156
- linspace, 156
- logspace, 156
- matplotlib, 155
- numpy, 155
- plot, 156
- polyfit, 157
- polyval, 157
- print, 157
- pylab, 155
- return, 156
- savefig, 157
- show, 155
- title, 157
- while, 155
- xlabel, 157
- ylabel, 157

- absolutkonvergens, 96
- acceleration, 116
- andra-derivata-testet, 55
- areaelement, 85, 128

- Banachs fixpunktssats, 22
- basfunktion, 150
- begränsad, 18
 - funktion, 18
 - mängd, 18
- beräkningsnät, 149
- bivillkor, 60
- båglängdselement, 120

- C, 155
- C++, 155
- C#, 155
- cylindriska koordinater, 105

- definitionsområde, 15
- densitet, 108

- derivata, 24
- deriverbar, 24
- Dirichlets randvillkor, 147
- divergens, 132
- divergenssatsen, 135, 138
- divergent integral, 95
- domän, 15
- dubbelintegral, 85, 87

- energiprincipen, 145
- enhetsnormalvektor, 127
- enkelt sammanhängande mängd, 134
- extrempunkt, 51
- extremvärde, 51
 - nödvändiga villkor, 52
- extremvärdessatsen, 52

- fart, 116
- finita elementmetoden, 149
- fixpunktssatsen, 22
- flödesintegral, 130
- flödestäthet, 136
- Fortran, 155
- Fouriers lag, 146
- Frobenius-norm, 22
- Fubinis sats, 85
- funktion, 15
- fält, 132

- Gauss divergenssats, 135, 138
- generaliserad integral, 95
- gles matris, 151
- globalt maximum, 51
- globalt minimum, 51
- gradient, 42, 132
- gradientvektor, 42
- graf, 16
- gränsvärde, 19

- Haskell, 155
- hastighet, 116
- Hesse-matrisen, 41

- indefinit, 55
- infimum, 53
- inre punkt, 17
- integral
 - egenskaper, 87, 98
 - kontinuerliga funktioner, 85
- Jacobi-determinant, 92, 104
- Jacobi-matris, 25
- Java, 155
- Julia, 155
- kodomän, 15
- konservativt fält, 123
- konsivering av energi, 145
- konserveringslag, 145
- konstitutiv lag, 146
- kontinuitet, 19
 - i en punkt, 19
 - Lipschitz, 20
- konvergent integral, 95
- konvex mängd, 36
- koordinatkurvor, 126
- kritisk punkt, 52
- kurv
 - längd, 120
- kurva, 115
 - enkel, 115
 - parameterform, 115
 - sluten, 115
 - slät, 116
- kurvintegral, 120
- kvadratisk form, 55
- källtäthet, 145
- källtäthet, 136
- Lagrange-funktion, 61
- Lagrange-multiplikator, 61
- Lagranges multiplikatormetod, 61
- Laplace-operatorn, 147
- Laplaces ekvation, 147
- lastvektor, 151
- linjäriserad ekvation, 30
- Lipschitz-kontinuerlig, 36
- Lipschitz-kontinuitet, 20
- lokalt maximum, 51
- lokalt minimum, 51
- massa, 108
- masscentrum, 108
- masstäthet, 108
- MATLAB, 155
- medelhastighet, 116
- medelvärde, 91
- medelvärde med vikt, 107
- medelvärdessatsen, 90, 108
- minsta övre begränsning, 53
- mängd
 - kompakt, 17, 18
 - sluten, 17
 - öppen, 17
- målfunktion, 60
- nabla-operatorn, 42, 132
- negativt definit, 55
- Neumanns randvillkor, 147
- Newtons metod, 31
- nivåkurva, 16
- normalderivata, 147
- normalytelement, 130
- normalytintegral, 130
- numerisk derivata, 29
- oberoende av vägen, 124, 125
- omgivning, 17
- orienterbar yta, 129
- partiell derivata, 25
- partiell integration, 145
- partiellt deriverbar, 25
- partition av rektangel, 84
- Poissons ekvation, 147
- polära koordinater, 94
- positivt definit, 55
- potential, 123
- potentiell energi, 124
- produktderivering, 134
- programmering, 155
- punktkälla, 136
- Python, 155

- randpunkt, 17
- randvillkor, 147
- randvärdesproblem, 71, 147, 148
 - svag form, 148, 149
- residual, 31
- Riemann-summa, 84
- riktningsderivata, 43
- Robins randvillkor, 147
- rotation, 132

- sadelpunkt, 54
- sammanhängande mängd, 90
- sfäriska koordinater, 106
- singulär punkt, 52
- skalärt fält, 42, 132
- skivningsmetoden, 89, 100
- sluten mängd, 17
- slät yta, 135
- stationär punkt, 52
- styvhetsmatris, 151
- största undre begränsning, 53
- supremum, 53
- svag formulering, 75

- tangentkurvintegral, 122
- tangentlinje, 117
- tangentplan, 126
- tangentvektor, 116
- Taylors formel, 41
- Taylors polynom, 41
- Taylors sats, 41
- temperatur, 145
- testfunktion, 75
- trippelintegral, 98
- tröghetsmoment, 109
- tyngdpunkt, 108

- upprepad integration, 85

- värmeöverföringskoefficient, 145
- värmeledningsekvationen, 146
- värmeledningskoefficient, 145
- variabelsubstitution, 93, 104
- vektorbåglängdselement, 122
- vektorfält, 42, 132

- viktfunktion, 107
- vinkelhastighet, 118
- volymselement, 98
- värdeområde, 15
- värmeledningskoefficient, 145
- vågekvationen, 39

- yta, 125
 - area, 128
 - parameterform, 125
- ytintegral, 128

- öppen mängd, 17

