Matematik Chalmers

Tentamen i TMV160 Matematisk analys i flera variabler M, 2008–05–26, f M

Telefon: Fredrik Lindgren 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Teknologer inskrivna 2006 och tidigare löser uppgifterna på baksidan av detta blad. (Man kan välja att göra uppgifterna på framsidan men inte blanda.)
Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Beräkna integralen $\iint_T xy\,\mathrm{d}A$ där T är triangeln med hörn i (0,0), (1,0), (0,1).

2. Undersök funktionen $f(x) = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{8}{x_1} - x_2$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

3. Skriv ned Taylors polynom av grad 2 med baspunkt $a = (1,1)$ för funktionen i uppgift 2.

4. (a) Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \\ &x_2 x_3 - x_3 = 0 \\ &x_3^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

med startpunkt $(1,1,1)$. (4 poäng)
(b) Härled Newtons metod med hjälp av linjärisering. (2 poäng)
(c) Skriv ned Newtons metod i MATLAB. Antag att funktionen `jacobi.m` finns. (2 poäng)

5. Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & \text{i } D, \\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S. \end{cases}$$

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ut ur området $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le z,\ 0 \le z \le 1\}$ utan att använda divergenssatsen.

7. Beräkna flödet i uppgift 6 med hjälp av divergenssatsen.

8. (a) Visa att

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$$

(b) Bevisa partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}V$$

/stig

För teknologer inskrivna 2006 och tidigare.

1. Beräkna integralen $\iint_T xy\,\mathrm{d}A$ där T är triangeln med hörn i (0,0), (1,0), (0,1).

2. Undersök funktionen $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

3. Skriv ned Taylors polynom av grad 2 med baspunkt $(1,1)$ för funktionen i uppgift 2.

4. Beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$ och C ges av grafen $y = \sin x$, $x \in [1,5]$, genomlöpt i riktningen med växande x.

5. Beräkna $f'_{\mathbf{v}}(1,1)$ och $\nabla f(1,1)$ för $f(x,y) = \sin(x/y)$ och då $\mathbf{v}$ pekar i den riktning som ges av (2,1).

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ut ur området $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq 1\}$ utan att använda divergenssatsen.

7. Beräkna flödet i uppgift 6 med hjälp av divergenssatsen.

8. (a) Visa att

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$$

(2 poäng)

(b) Definiera begreppet differentierbarhet för en funktion $f(x,y)$ i en punkt (a,b). (2 poäng)

(c) Härled formeln för ytelementet för en graf $z = f(x,y)$ parametriserad med x, y. (4 poäng)

`/stig`

TMV160 Matematisk analys i flera variabler M, 2008–05–26, f M. Svar.

Obs: följande är endast svar eller kortfattade lösningar. De är inte tillräckligt utförliga för att ge full poäng.

1.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2} x(1-x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}$$

2. $f(x) = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{8}{x_1} - x_2$. Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} x_2^{-1} - 8x_1^{-2} \\ -x_1 x_2^{-2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En kritisk punkt $x = (-4, 2)$. Hesse-matrisen är

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 16x_1^{-3} & -x_2^{-2} \\ -x_2^{-2} & 2x_1 x_2^{-3} \end{bmatrix}$$

I den kritiska punkten:

$$f''(-4,2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

$f''(-4,2)$ har egenvärdena $(-5 \pm \sqrt{13})/8 < 0$, lokalt maximum.

3.

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R_2(x) = P_2(x) + R_2(x)$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1,1) + f'(1,1)h + \frac{1}{2} h^T f''(1,1) h \\ &= 8 + \begin{bmatrix} -7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \\ \text{där } h &= \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. (a)

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ x_2 x_3 - x_3 \\ x_3^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$b = -f(1,1,1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & x_3 & x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix}, \quad A = f'(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Ah = b, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Exakt lösning.)}$$

(b)

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)h = 0, \quad f'(x_0)h = -f(x_0), \quad x = x_0 + h$$

(c)

```
function x = newton(f,x0,tol)

x = x0;
h = tol + 1;

while norm(h)>tol
   A = jacobi(f,x);      % evaluate the Jacobian A=Df(x)
   b = -f(x);            % evaluate the residual b=-f(x)
   h = A\b;              % solve the linearized equation
   x = x + h;            % update
end
```

5. Multiplicera med testfunktion v och integrera partiellt:

$$\iiint_D fv\,\mathrm{d}V = -\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)v\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot(a\nabla u)v\,\mathrm{d}S + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V$$

Här är

$$\hat{\mathbf{N}}\cdot(a\nabla u) = a\hat{\mathbf{N}}\cdot\nabla u = a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}\nabla u = g - k(u - u_A)$$

så att

$$\iiint_D fv\,\mathrm{d}V = \iint_S (g - k(u - u_A))v\,\mathrm{d}S + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V$$

Samla u-termer:

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V + \iint_S kuv\,\mathrm{d}S = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V = \iint_S (g + ku_A)v\,\mathrm{d}S$$

Svaga formen blir: finn u sådan att

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V + \iint_S kuv\,\mathrm{d}S = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V = \iint_S (g + ku_A)v\,\mathrm{d}S$$

för alla testfunktioner v.

6. Parametrisering av den buktiga delen S_1 av ytan ($z = x^2 + y^2 = r^2$):

$$\begin{cases} x = \sqrt{z}\cos(\theta), \\ y = \sqrt{z}\sin(\theta), \qquad 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le z \le 1. \\ z = z, \end{cases}$$

Tangenter:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\sqrt{z}\sin(\theta)\mathbf{i} + \sqrt{z}\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\cos(\theta)\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{z}}\sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \sqrt{z}\cos(\theta)\mathbf{i} + \sqrt{z}\sin(\theta)\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

Vi ser att $\mathbf{N}$ pekar utåt och

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}|\mathbf{N}|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \mathbf{N}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

så att flödet blir

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \iint_{S_1} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k})\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= \iint_{S_1} (x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (z - \frac{1}{2}z^2)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = 2\pi(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}) = 2\pi/3$$

På toppytan S_2:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta), \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi, \\ z = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\ \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k},\ \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = z^2 = 1$$

så att

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_2} \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

Alltså blir totala flödet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = 2\pi/3 + \pi = 5\pi/3$$

7.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 1 + 2z = 2(1 + z)$$

Divergenssatsen:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}V = \iiint_D 2(1+z)\,\mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} 2(1+z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 2(1+z) \int_0^{\sqrt{z}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 2\pi \int_0^1 2(1+z)\frac{z}{2}\,\mathrm{d}z = 2\pi \int_0^1 (z + z^2)\,\mathrm{d}z = 2\pi(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) = 5\pi/3$$

8. (a) Adams 16.2, Sats 3.

(b) Produktderivering:

$$\nabla \cdot (\mathbf{F}\phi) = \nabla \cdot \mathbf{F}\phi + \mathbf{F} \cdot \nabla\phi$$

Divergenssatsen:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \, \mathrm{d}V + \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}V = \iiint_D \nabla \cdot (\mathbf{F}\phi) \, \mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{F}\phi) \, \mathrm{d}S = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \, \mathrm{d}S$$

så att

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \, \mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \, \mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}V$$

För teknologer inskrivna 2006 och tidigare.

1. Som ovan.

2. Som ovan.

3. Som ovan.

4. $2(\cos 5 - \cos 1) + 5\sin 5 - \sin 1$

5. $\nabla f(1,1) = (\cos 1, -\sin 1)$, $f'_{\mathbf{v}}(1,1) = \frac{\cos 1}{\sqrt{5}}$

6. Som ovan.

7. Som ovan.

8. (a) Som ovan. (b) Se boken.

`/stig`