Matematik Chalmers

**Tentamen i TMV160 Matematisk analys i flera variabler M, 2009–01–10, f V**

Telefon: Magnus Goffeng 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

**Teknologer inskrivna 2006 och tidigare löser uppgifterna på baksidan av detta blad. (Man kan välja att göra uppgifterna på framsidan men inte blanda.)**
Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

**1.** Beräkna integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $C$ är den räta linjen från origo till punkten (1,2,-1) och $\mathbf{F} = (x, xz, y)$.

**2.** Undersök funktionen $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

**3.** Skriv ned Taylors polynom av grad 2 med baspunkt $a = (1, 1, 1)$ för funktionen i uppgift 2.

**4.** (a) Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \\ &x_2x_3 - x_3 = 0 \\ &x_3^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

med startpunkt $(1, 1, 1)$. (4 poäng)

(b) Härled Newtons metod med hjälp av linjärisering. (2 poäng)

(c) Skriv ned Newtons metod i MATLAB. Antag att funktionen `jacobi.m` finns. (2 poäng)

**5.** Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) = f \quad \text{i } D, \\ u = 0 \quad \text{på } S. \end{cases}$$

**6.** Beräkna arean av ytan $S$ som har parametriseringen

$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \qquad 0 < u < 1,\ 0 < v < \pi. \\ z = u^2, \end{cases}$$

**7.** Beräkna integralen $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$ där $V$ är volymen som ligger innanför klotet $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**8.** Härled värmeledningsekvationen

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = f$$

/stig **Vänd!**

**För teknologer inskrivna 2006 och tidigare.**

**1.** Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ där $C$ är den räta linjen från origo till punkten (1,2,-1) och $\mathbf{F} = (x, xz, y)$.

**2.** Undersök funktionen $f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 - 4x_1x_2$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

**3.** Skriv ned Taylors polynom av grad 2 med baspunkt $a = (1, 1)$ för funktionen i uppgift 2.

**4.** Beräkna $\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ och $C$ ges av grafen $y = \sin x$, $x \in [1, 5]$, genomlöpt i riktningen med växande $x$.

**5.** Beräkna $f'_{\mathbf{v}}(1, 1)$ och $\nabla f(1, 1)$ för $f(x, y) = \sin(x/y)$ och då $\mathbf{v}$ pekar i den riktning som ges av (2,1).

**6.** Beräkna arean av ytan $S$ som har parametriseringen

$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \qquad 0 < u < 1,\ 0 < v < \pi. \\ z = u^2, \end{cases}$$

**7.** Beräkna integralen $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ där $V$ är volymen som ligger innanför klotet $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**8.** (a) Visa att

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$$

(2 poäng)

(b) Definiera begreppet differentierbarhet för en funktion $f(x, y)$ i en punkt $(a, b)$. (2 poäng)

(c) Härled formeln för ytelementet för en graf $z = f(x, y)$ parametriserad med $x, y$. (4 poäng)

`/stig`

**TMV160 Matematisk analys i flera variabler M, 2009–01–10, f V. Svar.**

---

Obs: följande är endast svar eller kortfattade lösningar. De är inte tillräckligt utförliga för att ge full poäng.

**1.** (Ej konservativ.) Parameterframställning

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = -t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

Integralen blir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{t})) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t, -t^2, 2t) \cdot (1, 2, -1) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t - 2t^2 - 2t) \,\mathrm{d}t$$
$$= \left[ t^2/2 - 2t^3/3 - t^2 \right]_0^1 = -7/6$$

**2.**

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2$$

Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} x_1^2 - 4x_2 \\ 2x_2 - 4x_1 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De kritiska punkterna är $x = (0, 0, 0)$ och $x = (8, 16, 0)$. Hesse-matrisen är

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

I den ena kritiska punkten:

$$f''(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $1 \pm \sqrt{17}, 2$, olika tecken, sadelpunkt.

I den andra kritiska punkten:

$$f''(8, 16, 0) = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $9 \pm \sqrt{65}, 2$, alla positiva, lokalt minimum.

**3.**

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}h^T f''(a)h + R_2(x) = P_2(x) + R_2(x)$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1,1,1) + f'(1,1,1)h + \frac{1}{2}h^T f''(1,1,1)h \\ &= -\frac{5}{3} + \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}, \\ &\text{där } h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**4.** (a)

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ x_2 x_3 - x_3 \\ x_3^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$b = -f(1,1,1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & x_3 & x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix}, \quad A = f'(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Ah = b, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Exakt lösning.)}$$

(b)

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)h = 0, \quad f'(x_0)h = -f(x_0), \quad x = x_0 + h$$

(c)

```
function x = newton(f,x0,tol)

x = x0;
h = tol + 1;

while norm(h)>tol
   A = jacobi(f,x);       % evaluate the Jacobian A=Df(x)
   b = -f(x);             % evaluate the residual b=-f(x)
   h = A\b;               % solve the linearized equation
   x = x + h;             % update
end
```

**5.** Multiplicera med testfunktion $v$ sådan att $v = 0$ på $S$ och integrera partiellt:

$$\iiint_D fv \, \mathrm{d}V = -\iiint_D \nabla \cdot (a\nabla u) v \, \mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot (a\nabla u) v \, \mathrm{d}S + \iiint_D a\nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}V$$

Här är

$$\iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot (a\nabla u) v \, \mathrm{d}S = 0$$

så att

$$\iiint_D fv\,\mathrm{d}V = \iiint_D a\nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}V$$

Svaga formen blir: finn $u$ sådan att $u = 0$ på $S$ och

$$\iiint_D a\nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}V = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V$$

för alla testfunktioner $v$ sådana att $v = 0$ på $S$.

**6.** Parametrisering:

$$\mathbf{r} = (u\cos v, u\sin v, u^2)$$

Tangenter:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_u &= (\cos v, \sin v, 2u)\\ \mathbf{r}'_v &= (-u\sin v, u\cos v, 0)\end{aligned}$$

En normalvektor:

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)$$

Ytelementet:

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{4u^4 + u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Arean:

$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{d}S &= \int_D u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^\pi \mathrm{d}v \int_0^1 u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u\\ &= \left\{s = 4u^2+1,\ \mathrm{d}s = 8u\,\mathrm{d}u\right\} = \pi\frac{1}{8}\int_1^5 s^{1/2}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{8}\left[\frac{2}{3}s^{3/2}\right]_1^5 = \frac{\pi}{12}(5\sqrt{5}-1)\end{aligned}$$

**7.** Vi parametriserar området med sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi/4 \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

Volymselementet: $\mathrm{d}V = \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$. Integranden: $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho$. Integralen blir

$$\begin{aligned}\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{\rho=0}^{1} \rho\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\\ &= 2\pi\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/4}\frac{1}{4}\\ &= \frac{\pi}{4}(2-\sqrt{2})\end{aligned}$$

**8.** Se föreläsningsanteckningar.

**För teknologer inskrivna 2006 och tidigare.**

**1.** Som ovan.

**2.** Som ovan men utan variabeln $x_3$.

**3.** Som ovan men utan variabeln $x_3$.

**4.** Ej konservativ. Parametrisering $x = t,\ y = \sin t$. Enligt kurvintegralens definition:

$$\int_1^5 (-\sin t, t) \cdot (1, \cos t)\, dt = \int_1^5 (-\sin t + t\cos t)\, dt = 2(\cos 5 - \cos 1) + 5\sin 5 - \sin 1$$

**5.** $\nabla f(1,1) = (\cos 1, -\cos 1)$, $f'_{\mathbf{v}}(1,1) = \frac{\cos 1}{\sqrt{5}}$

**6.** Som ovan.

**7.** Som ovan.

**8.** Se boken.

/stig