Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2009–05–26, f M

Telefon: Peter Lindroth 0762-721861
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Teknologer inskrivna 2006 och tidigare löser uppgifterna på baksidan av detta blad. (Man kan välja att göra uppgifterna på framsidan men inte blanda.)
Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: fredag 12 juni, 10-12, hos Stig Larsson.

---

1. Beräkna integralen $\int_C \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}$ där C är kurvan $\mathbf{r} = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t \in [1,5]$.

2. Undersök funktionen $f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^2x_2 + x_2^2 - x_1x_2$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

3. Skriv ned hur man löser uppgift 2 med hjälp av våra Matlab-program `newton.m` och `jacobi.m`.

4. Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \\ &x_2x_3 - x_3 = 0 \\ &x_3^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

med startpunkt $(1,0,1)$.

5. Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & \text{i } D, \\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u-u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S. \end{cases}$$

6. Beräkna arean av ytan S som har parametriseringen

$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, & 0<u<1,\ 0<v<\pi. \\ z = u^2, \end{cases}$$

7. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ut ur klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$ med hjälp av Gauss divergenssats.

8. (a) Bevisa att $\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(a,b) = \mathbf{u}\cdot\nabla f(a,b)$. (4 p)
(b) Härled randvillkoret

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u-u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S$$

för värmeledningsekvationen. Förklara vad termerna $a, u, k, u_A, g, S, \hat{\mathbf{N}}, S$ betyder. (4 p)

`/stig` **Vänd!**

För teknologer inskrivna 2006 och tidigare. Skriv ”gammal” på tentamensomslaget om du väljer att göra dessa uppgifter.

1. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ där C är kurvan $\mathbf{r} = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t \in [1, 5]$.

2. Undersök funktionen $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + y^2 - xy$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

3. Skriv ned Taylors polynom av grad 2 med baspunkt $(0, 1)$ för funktionen i uppgift 2.

4. Beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ och C ges av grafen $y = \sin x$, $x \in [1, 5]$, genomlöpt i riktningen med växande x.

5. Beräkna $f'_{\mathbf{v}}(1, 1)$ och $\nabla f(1, 1)$ för $f(x, y) = \sin(x/y)$ och då $\mathbf{v}$ pekar i den riktning som ges av (2,1).

6. Beräkna arean av ytan S som har parametriseringen

$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \qquad 0 < u < 1,\ 0 < v < \pi. \\ z = u^2, \end{cases}$$

7. Beräkna integralen $\iiint_B (3x^2 + 3y^2 + 1)\,\mathrm{d}V$ där B är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

8. (a) Bevisa att $\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b)$. (4 p)

(b) Härled formeln för ytelementet för en graf $z = f(x, y)$ parametriserad med x, y. (4 poäng)

/stig

MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2009–05–26, f M. Svar.

1.

$$\int_C \mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_1^5 \mathbf{r}(t)\cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_1^5 \Big((3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}\Big)\cdot\Big((-3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_1^5 t\,\mathrm{d}t = \Big[t^2/2\Big]_1^5 = 12$$

Man kan även utnyttja att vektorfältet är konservativt med potentialen $\phi = \frac{1}{2}|\mathbf{r}|^2$, dvs $\mathbf{r} = \nabla\phi = \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{r}|^2$. Då blir integralen

$$\int_C \mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \Big[\phi\Big]_{P_0}^{P_1} = \frac{1}{2}|(3\cos 5)\mathbf{i} + (3\sin 5)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}|^2 - \frac{1}{2}|(3\cos 1)\mathbf{i} + (3\sin 1)\mathbf{j} + \mathbf{k}|^2$$
$$= \frac{1}{2}((3\cos 5)^2 + (3\sin 5)^2 + 25) - \frac{1}{2}((3\cos 1)^2 + (3\sin 1)^2 + 1) = 12$$

2.

$$f(x_1,x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2x_2 + x_2^2 - x_1x_2$$

Inga singulära punkter, inga randpunkter. Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} x_1x_2 - x_2 \\ \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De kritiska punkterna är $x = (0,0)$, $x = (2,0)$ och $x = (1,\frac{1}{4})$. Hesse-matrisen är

$$f''(x) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 1 \\ x_1 - 1 & 2 \end{bmatrix}$$

I den ena kritiska punkten:

$$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $1 \pm \sqrt{2}$, olika tecken, sadelpunkt.

I den andra kritiska punkten:

$$f''(2,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $1 \pm \sqrt{2}$, olika tecken, sadelpunkt.

I den tredje kritiska punkten:

$$f''(1,\tfrac{1}{4}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\frac{1}{4}, 2$, positiva, lokalt minimum.

3. Man gör först en konturplot av funktionen f för att få en uppfattning om var extrempunkterna ligger.

Man skriver sedan en funktionsfil `gradf.m` för gradienten:

```
function  y=gradf(x)
  y(1)=  x(1)*x(2)-x(2);
  y(2)=  0.5 * x(1)^2+2*x(2)-x(1);
```

Sedan kör man

```
>> x0=[1;1];
>> x=newton(@gradf,x0,1e-6)
```

För att bestämma punktens karaktär beräknar vi Hesse-matrisen i punkten `x` (Hesse-matrisen är ju Jacobi-matrisen av gradienten):

```
>> H=jacobi(@gradf, x)
```

och sedan egenvärdena

```
>> lambda=eig(H)
```

4. (a)

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ x_2 x_3 - x_3 \\ x_3^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & x_3 & x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix},$$

residualen $b = -f(1,0,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jacobi-matrisen $A = f'(1,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

linjäriserade ekvationen $Ah = b$, $\quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

uppdatera $x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Multiplicera med testfunktion v och integrera partiellt:

$$\iiint_D f v \, \mathrm{d}V = -\iiint_D \nabla \cdot (a \nabla u) v \, \mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot (a \nabla u) v \, \mathrm{d}S + \iiint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}V$$

Här är

$$\hat{\mathbf{N}} \cdot (a \nabla u) = a \hat{\mathbf{N}} \cdot \nabla u = a \mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u = g - k(u - u_A)$$

så att

$$\iiint_D f v \, \mathrm{d}V = \iint_S (g - k(u - u_A)) v \, \mathrm{d}S + \iiint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}V$$

Samla u-termer:

$$\iiint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}V + \iint_S k u v \, \mathrm{d}S = \iiint_D f v \, \mathrm{d}V = \iint_S (g + k u_A) v \, \mathrm{d}S$$

Svaga formen blir: finn u sådan att

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V+\iint_S kuv\,\mathrm{d}S=\iiint_D fv\,\mathrm{d}V=\iint_S (g+ku_A)v\,\mathrm{d}S$$

för alla testfunktioner v.

6. Parametrisering:

$$\mathbf{r}=u\cos v\,\mathbf{i}+u\sin v\,\mathbf{j}+u^2\,\mathbf{k},\quad (u,v)\in D=\{0<u<1,\ 0<v<\pi\}$$

Tangenter:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_u&=\cos v\,\mathbf{i}+\sin v\,\mathbf{j}+2u\,\mathbf{k}\\ \mathbf{r}'_v&=-u\sin v\,\mathbf{i}+u\cos v\,\mathbf{j}+0\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

En normalvektor:

$$\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v=-2u^2\cos v\,\mathbf{i}-2u^2\sin v\,\mathbf{j}+u\,\mathbf{k}$$

Ytelementet:

$$\mathrm{d}S=|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\sqrt{4u^4+u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Arean:

$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{d}S&=\int_D u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_0^\pi \mathrm{d}v\int_0^1 u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u\\ &=\Big\{s=4u^2+1,\ \mathrm{d}s=8u\,\mathrm{d}u\Big\}=\pi\frac{1}{8}\int_1^5 s^{1/2}\,\mathrm{d}s=\frac{\pi}{8}\Big[\frac{2}{3}s^{3/2}\Big]_1^5=\frac{\pi}{12}(5\sqrt{5}-1)\end{aligned}$$

7. Gauss divergenssats ger att utflödet är

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S=\iiint_B \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V$$

Med sfäriska koordinater

$$\begin{cases}x=\rho\sin\phi\cos\theta\\ y=\rho\sin\phi\sin\theta\\ z=\rho\cos\phi\end{cases}\qquad 0\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le\pi,\ 0\le\theta<2\pi,$$

Volymselementet: $\mathrm{d}V=\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$. Integranden: $\nabla\cdot\mathbf{F}=3x^2+3y^2+1=3\rho^2\sin^2\phi+1$. Integralen blir

$$\begin{aligned}\iiint_B \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V&=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1}(3\rho^2\sin^2\phi+1)\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\\ &=3\int_0^1\rho^4\,\mathrm{d}\rho\int_0^\pi\sin^3\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta+\int_0^1\rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^\pi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\\ &=3\,\frac{1}{5}\,\frac{4}{3}\,2\pi+\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\pi=\frac{8}{5}\pi+\frac{4}{3}\pi=\frac{44}{15}\pi\end{aligned}$$

där vi använt

$$\int_0^\pi \sin^3\phi\,\mathrm{d}\phi=\int_0^\pi(1-\cos^2\phi)\sin\phi\,\mathrm{d}\phi=\Big\{s=-\cos\phi\Big\}=\int_{-1}^1(1-s^2)\,\mathrm{d}s=\frac{4}{3}$$

8. (a) Sats 7 i Adams 12.7.

(b) Värmeflödet genom randen är proportionellt mot temperaturdifferensen, plus eventuellt bidrag från värmekällor på randen. Värmeflödestätheten **ut** genom randen blir då

$$\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{N}} = k(u - u_\mathrm{A}) - g \quad \text{på } S,$$

där u är temperaturen på insidan av randytan, u_A är omgivningens temperatur ("ambient temperature"), k är värmeöverföringskoefficienten för det isolerande ytskiktet, och g är tätheten för ett föreskrivet **in**flöde. Enligt Fouriers lag har vi

$$\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{N}} = -a\nabla u \cdot \hat{\mathbf{N}} = -a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u \quad \text{på } S,$$

där a är värmeledningskoefficienten och $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u = \hat{\mathbf{N}} \cdot \nabla u$ betecknar normalderivatan av u, dvs riktningsderivatan i normalriktningen $\hat{\mathbf{N}}$. Därför blir randvillkoret

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_\mathrm{A}) = g \quad \text{på } S. \qquad \text{(Robins randvillkor)}$$

För teknologer inskrivna 2006 och tidigare.

1. Som ovan.

2. Som ovan.

3.

$$P_2(x,y) = 1 + \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-1 \end{bmatrix}$$

4. Ej konservativ. Parametrisering $x = t,\ y = \sin t$. Enligt kurvintegralens definition:

$$\int_1^5 (-\sin t, t) \cdot (1, \cos t)\, dt = \int_1^5 (-\sin t + t\cos t)\, dt = 2(\cos 5 - \cos 1) + 5\sin 5 - \sin 1$$

5. $\nabla f(1,1) = (\cos 1, -\cos 1)$, $f'_{\mathbf{v}}(1,1) = \frac{\cos 1}{\sqrt{5}}$

6. Som ovan.

7. Nästan som ovan.

8. Se boken.

`/stig`