Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2009–08–29, e V

Telefon: David Heintz 0762–721861
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Teknologer inskrivna 2006 och tidigare löser uppgifterna på baksidan av detta blad. (Man kan välja att göra uppgifterna på framsidan men inte blanda.)
Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Beräkna integralen $\iint_T \sin(x+y)\,\mathrm{d}A$ där T är triangeln med hörn i (0,0), (1,0), (0,1).

2. Undersök funktionen $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

3. Skriv ned Taylors polynom av grad 2 med baspunkt $a = (1,1)$ för funktionen i uppgift 2.

4. (a) Beräkna ett steg av Newtons metod för ekvationssystemet

$$\begin{aligned} &x_1 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 - 1 = 0 \\ &-x_1 + x_2 - x_2x_3 + x_1x_2x_3 - 1 = 0 \\ &x_2 + x_3 - x_1^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

med startpunkt $(0,0,0)$. (4 poäng)

(b) Härled Newtons metod för ekvationssystem med hjälp av linjärisering. (2 poäng)

(c) Beskriv hur man löser detta system med startpunkt $(0,0,0)$ och tolerans 10^{-6} med hjälp av det program `newton.m` som du har skrivit. Du ska inte skriva ned programmet `newton.m` här utan skriva ned alla kommandon och filer som man behöver skriva för att lösa just detta ekvationssystem om man har programmet `newton`. (2 poäng)

5. Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & \text{i } D, \\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S. \end{cases}$$

6. Beräkna integralen $\iiint_B (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$ där B är klotet $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

7. Laplace-operatorn i sfärisk symmetri. Låt x, y, z vara cartesiska koordinater och ρ, ϕ, θ vara sfäriska koordinater. Antag att funktionen u är sfäriskt symmetrisk, dvs $u = u(\rho)$ beror endast på ρ men ej på ϕ, θ. Visa att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho^2\frac{du}{d\rho}\Big)$$

8. (a) Härled ytelementet $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ för en graf $z = f(x,y)$.

(b) Bevisa partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}V$$

/stig

För teknologer inskrivna 2006 och tidigare.

1. Beräkna integralen $\iiint_D ze^{x+y}\,dx\,dy\,dz$ där D är rätblocket $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. (6p)

2. Undersök om följande gränsvärden existerar eller ej: (3+3p)

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2}$$

3. Låt $\mathbf{F} = (y-x, x)$. Beräkna integralen $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där C är kurvan från punkten $(0,0)$ till punkten $(\pi, 0)$ längs grafen $y = \sin^3 x$. (6p)

4. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2y - x - y$ på den slutna triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$. (6p)

5. Beräkna $f'_{\mathbf{v}}(1,1)$ och $\nabla f(1,1)$ för $f(x,y) = \sin(x/y)$ och då $\mathbf{v}$ pekar i den riktning som ges av (2,1).

6. Beräkna integralen $\iiint_B (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$ där B är klotet $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$.

7. Laplace-operatorn i sfärisk symmetri. Låt x, y, z vara cartesiska koordinater och ρ, ϕ, θ vara sfäriska koordinater. Antag att funktionen u är sfäriskt symmetrisk, dvs $u = u(\rho)$ beror endast på ρ men ej på ϕ, θ. Visa att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho^2\frac{du}{d\rho}\Big)$$

8. (a) Visa att

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$$

(2 poäng)

(b) Definiera begreppet differentierbarhet för en funktion $f(x,y)$ i en punkt (a,b). (2 poäng)

(c) Härled formeln för ytelementet för en graf $z = f(x,y)$ parametriserad med x, y. (4 poäng)

`/stig`

MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2009–08–29, e V. Svar.

Obs: följande är endast svar eller kortfattade lösningar. De är inte tillräckligt utförliga för att ge full poäng.

1.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sin(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[-\cos(x+y)\Big]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (\cos(x) - \cos(1))\,\mathrm{d}x = \sin(1) - \cos(1)$$

2. $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1 x_2$. Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} f'_{x_1}(x) \\ f'_{x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den andra ekvationen ger $x_1 = 2x_2$ vilket insättes i den första ekvationen: $12x_2^2 - x_2 = 0$, vilken har två lösningar $x_2 = 0$ och $x_2 = 1/12$. Vi har alltså två stationära punkter nämligen $(0,0)$ och $(1/6, 1/12)$. Hessematrisen är

$$f''(x) = \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_1 x_2} & f''_{x_2 x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

I de två punkterna får vi $f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $1 \pm \sqrt{2}$, så att matrisen är indefinit, och $f''(1/6, 1/12) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $(3 \pm \sqrt{5})/2$, så att matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(0,0)$ är en sadelpunkt och att $(1/6, 1/12)$ är en minimipunkt.

3.

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R_2(x) = P_2(x) + R_2(x)$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1,1) + f'(1,1)h + \frac{1}{2} h^T f''(1,1) h \\ &= 1 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \\ \text{där } h &= \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. (a)

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 - 1 \\ -x_1 + x_2 - x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 - 1 \\ x_2 + x_3 - x_1^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 1 + x_2^2 + x_3^2 & 2x_1 x_2 & 2x_1 x_3 \\ -1 + x_2 x_3 & 1 - x_3 + x_1 x_3 & -x_2 + x_1 x_2 \\ -2x_1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{residualen } b = -f(0,0,0) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{Jacobimatrisen } A = f'(0,0,0) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Ah = b, \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$x = x_0 + h = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

(b)

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)h = 0, \quad f'(x_0)h = -f(x_0), \quad x = x_0 + h$$

(c) Man skriver en funktionsfil:

```
function y=funk(x)
y=zeros(3,1);
y(1) = x(1)+x(1)*x(2)^2+x(1)*x(3)^2-1;
y(2) = -x(1)+x(2)-x_2*x(3)+x(1)*x_2*x(3)-1;
y(3) = x(2)+x(3)-x(1)^2 -1;
```

Sedan skriver man på kommandoraden:

```
>> x0=[0;0;0]
>> tol=1e-6;
>> x = newton(@funk,x0,tol)
```

5. Multiplicera med testfunktion v och integrera partiellt:

$$\iiint_D fv\,\mathrm{d}V = -\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)v\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot(a\nabla u)v\,\mathrm{d}S + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V$$

Här är

$$\hat{\mathbf{N}}\cdot(a\nabla u) = a\hat{\mathbf{N}}\cdot\nabla u = a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}\nabla u = g - k(u-u_A)$$

så att

$$\iiint_D fv\,\mathrm{d}V = \iint_S (g-k(u-u_A))v\,\mathrm{d}S + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V$$

Samla u-termer:

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V + \iint_S kuv\,\mathrm{d}S = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V = \iint_S (g+ku_A)v\,\mathrm{d}S$$

Svaga formen blir: finn u sådan att

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V + \iint_S kuv\,\mathrm{d}S = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V = \iint_S (g+ku_A)v\,\mathrm{d}S$$

för alla testfunktioner v.

6. Sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

Volymselementet: $\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\phi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\theta$. Integranden: $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\phi$. Integralen blir

$$\begin{aligned}
\iiint_B (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{R} \rho^2 \sin^2\phi \rho^2 \sin\phi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin^3\phi \,\mathrm{d}\phi \int_0^R \rho^4 \,\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (1-u^2)\,\mathrm{d}u \frac{R^5}{5} \\
&= 2\pi \frac{4}{3}\frac{R^5}{5} = \frac{8\pi R^5}{15}
\end{aligned}$$

7. Vi har

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\rho}$$

Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{du}{d\rho}\frac{x}{\rho} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2u}{d\rho^2}\Big(\frac{\partial \rho}{\partial x}\Big)^2 + \frac{du}{d\rho}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\rho} = \frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{du}{d\rho}\frac{\rho - x\frac{x}{\rho}}{\rho^2} \\
&= \frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{du}{d\rho}\Big(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\Big)
\end{aligned}$$

På samma vis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{y^2}{\rho^2} + \frac{du}{d\rho}\Big(\frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}\Big) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{z^2}{\rho^2} + \frac{du}{d\rho}\Big(\frac{1}{\rho} - \frac{z^2}{\rho^3}\Big)
\end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^2} + \frac{du}{d\rho}\Big(\frac{3}{\rho} - \frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^3}\Big) \\
&= \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho^2\frac{du}{d\rho}\Big)
\end{aligned}$$

8. (a) Adams 15.5.

(b) Produktderivering:

$$\nabla \cdot (\mathbf{F}\phi) = \nabla \cdot \mathbf{F}\phi + \mathbf{F} \cdot \nabla\phi$$

Divergenssatsen:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}V + \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}V = \iiint_D \nabla \cdot (\mathbf{F}\phi)\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{F}\phi)\,\mathrm{d}S = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}S$$

så att

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}V$$

`/stig`

För teknologer inskrivna 2006 och tidigare.

1. $(e-1)^2/2$

2. (a) existerar. (b) existerar ej.

3. Fältet är konservativt med potential $\phi(x,y) = xy - x^2/2$. Integralen blir $-\pi^2/2$.

4. Maximum 0 i punkten $(0,0)$, minimum -2 i punkten $(0,2)$.

5. $\nabla f(1,1) = (\cos 1, -\cos 1)$, $f'_{\mathbf{v}}(1,1) = \frac{\cos 1}{\sqrt{5}}$

6. Som ovan.

7. Som ovan.

8. Se boken.

`/stig`