Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2011–08–27, f V

Telefon: Magnus Önnheim 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng.

(a) Skriv ned en ekvation för tangentlinjen till kurvan $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ i punkten $(-2, 4, -8)$.

(b) Skriv ned en parameterframställning av den del av ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger innanför $x^2 + y^2 = 4$.

(c) Beräkna den linjära approximationen till $f(x) = x_1 e^{x_2 x_3} - \sqrt{x_1 - x_2^2}$ kring punkten $(4, 1, 0)$.

(d) Beräkna rotationen för vektorfältet $\mathbf{F} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k})$.

2. Beräkna massan av den plana skiva som begränsas av $y = h(\frac{x}{b})^2$ och $y = h$ och som har masstätheten $\delta(x, y) = \rho(1 + \frac{y}{h})$. Här är konstanterna b halva bredden och h höjden `[m]` och ρ en masstäthet `[kg/m`^{2}`]`.

3. (a) Skriv ned finita elementbasfunktionerna ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 för ett nät som består av en enda triangel T med hörnen (noderna) $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (1, 1)$. (2 p)

(b) Matrisen M med elementen $m_{ij} = \iint_T \phi_i(x, y)\phi_j(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kallas *massmatrisen*. Beräkna ett av elementen, till exempel, m_{11}. (4 p)

Tips: basfunktionerna är av formen $\phi(x, y) = a + bx + cy$ och lika med 1 en av noderna och 0 i de övriga.

4. Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{cases} x_1^5 + x_2^4 + x_3^4 - 1 = 0 \\ x_2 x_3^2 - x_3 = 0 \\ x_3^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

med startpunkt $(1, 0, 1)$.

5. Undersök funktionen $f(x, y) = 3x^2 - y^3 - 6xy$ med avseende på lokala extrempunkter. (Du måste beräkna egenvärdena till Hesse-matrisen för full poäng.)

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ genom den del av ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger under planet $z = 4$. Ytan orienteras med uppåtriktade normalvektorer.

7. Skriv ned randvärdesproblemet för värmeledning i kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, med värmeledningskoefficienten 3, källtätheten 2 och omgivande temperaturen 10 på alla sidor. På sidan $y = 0$ har vi värmeöverföringskoefficienten 7 medan övriga sidor har oändligt stor värmeöverföringskoefficient. Inga värmekällor på randen.

8. Bevisa partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi\,\mathrm{d}V$$

/stig

MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2011–08–27, f V. Lösningar.

---

1. (a)

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(-2) = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'(-2) = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

En ekvation för tangentlinjen:

$$\mathbf{r}(t) = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k} + t(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$$

(b)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = r, \end{cases} \quad 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

(c)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x_1 e^{x_2x_3} - \sqrt{x_1 - x_2^2}, & f(4,1,0) &= 4 - \sqrt{3} \\
f'_{x_1}(x) &= e^{x_2x_3} - \frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2^2}}, & f'_{x_1}(4,1,0) &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \\
f'_{x_2}(x) &= x_1x_3e^{x_2x_3} - \frac{-2x_2}{2\sqrt{x_1 - x_2^2}}, & f'_{x_2}(4,1,0) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
f'_{x_3}(x) &= x_1x_2e^{x_2x_3}, & f'_{x_3}(4,1,0) &= 4 \\
f'(4,1,0) &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 4 \end{bmatrix} \\
L(x) &= f(4,1,0) + f'(4,1,0)(x - (4,1,0)) \\
&= 4 - \sqrt{3} + \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(d) $\nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})\mathbf{i} - (\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z})\mathbf{j} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\mathbf{k} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + (\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2})\mathbf{k} = \mathbf{0}$

2.

$$\begin{aligned}
m &= \int_R \delta \,\mathrm{d}A = \int_{-b}^{b} \int_{h(x/b)^2}^{h} \rho(1 + y/h)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\rho \int_0^b \left[y + \frac{y^2}{2h} \right]_{h(x/b)^2}^{h} \mathrm{d}x = 2\rho h \int_0^b \left[\frac{3}{2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^4}{2b^4} \right] \mathrm{d}x \\
&= 2\rho h \Big[\frac{3b}{2} - \frac{b^3}{3b^2} - \frac{b^5}{10b^4} \Big] = \frac{32}{15}\rho b h.
\end{aligned}$$

3. (a) Vi använder ansatsen $\phi(x,y) = a + bx + cy$. Basfunktionen ϕ_1 bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phi_1(0,0) = a = 1 \\ \phi_1(1,0) = a + b = 0 \\ \phi_1(1,1) = a + b + c = 0 \end{cases} \quad \text{dvs } a = 1,\ b = -1,\ c = 0.$$

Basfunktionen ϕ_2 bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phi_2(0,0) = a = 0 \\ \phi_2(1,0) = a + b = 1 \\ \phi_2(1,1) = a + b + c = 0 \end{cases} \qquad \text{dvs } a = 0,\ b = 1,\ c = -1.$$

Basfunktionen ϕ_3 bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phi_3(0,0) = a = 0 \\ \phi_3(1,0) = a + b = 0 \\ \phi_3(1,1) = a + b + c = 1 \end{cases} \qquad \text{dvs } a = 0,\ b = 0,\ c = 1.$$

Vi får $\phi_1(x,y) = 1 - x,\ \phi_2(x,y) = x - y,\ \phi_3(x,y) = y.$

(b) Upprepad integration ger

$$\begin{aligned} m_{11} &= \iint_T \phi_1(x,y)^2\,\mathrm{d}A = \iint_T (1-x)^2\,\mathrm{d}A = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x (1-x)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^1 x(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{12}. \end{aligned}$$

Det krävs inte i uppgiften men de övriga matriselementen kan beräknas på liknande sätt. Massmatrisen blir då

$$M = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^5 + x_2^4 + x_3^4 - 1 \\ x_2 x_3^2 - x_3 \\ x_3^4 - 1 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 5x_1^4 & 4x_2^3 & 4x_3^3 \\ 0 & x_3^2 & 2x_2x_3 - 1 \\ 0 & 0 & 4x_3^3 \end{bmatrix},$$

Residualen: $b = -f(1,0,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jacobi-matrisen: $A = f'(1,0,1) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Lös den linjäriserade ekvationen: $Ah = b$, $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Uppdatera: $x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Kritiska punkter ges av

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 6x - 6y = 0 \\ f'_y(x,y) &= -3y^2 - 6x = 0 \end{aligned}$$

med rötterna $(0,0)$ och $(-2,-2)$. Hessematrisen är

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6y \end{bmatrix}$$

I punkten $(0,0)$ har vi

$$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $3 \pm \sqrt{45}$ med olika tecken, så att matrisen $f''(0,0)$ är indefinit: sadelpunkt.
I punkten $(-2,-2)$ har vi

$$f''(-2,-2) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $9 \pm \sqrt{45}$ med positiva tecken, så att matrisen $f''(-2,-2)$ är positivt definit: lokalt minimum.

6. Parametrisering:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x^2+y^2)\mathbf{k}, \quad x^2+y^2 \le 4$$

En normalvektor (uppåtriktad):

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Den uppåtriktade enhetsnormalvektorn:

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

Ytelementet:

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = |\mathbf{N}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Flödet blir (D är en disk med radie 2)

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S &= \iint_D \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}|\mathbf{N}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D (x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\cdot(-2x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+\mathbf{k})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D (-2x^2-2y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-2r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = -16\pi\end{aligned}$$

Alternativt kan vi bilda volymen V mellan ytan S och locket S_1 vid $z=4$ och använda divergenssatsen:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S - \iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V = \iiint_V 2\,\mathrm{d}V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{\sqrt{z}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta = 16\pi$$

Minustecknet beror på att på S är vår $\hat{\mathbf{N}}$ inåtriktad. På S_1 har vi $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$ så att $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} = 0$. Alltså:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = -16\pi$$

7. På sidan $y=0$ har vi $g=0$ och den utåtriktade normalvektorn $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{j}$ så att randvillkoret blir

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u-u_{\mathrm{A}}) = 3(-\mathbf{j})\cdot\nabla u(x,0) + 7(u(x,0)-10) = -3\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} + 7(u(x,0)-10) = 0.$$

Randvärdesproblemet är

$$\begin{cases} -3\Delta u(x,y) = 2 \quad \text{för } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 10, \\ -3\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y} + 7(u(x,0)-10) = 0, \end{cases}$$

där $\Delta u = \nabla\cdot\nabla u$.

8. Se FEM2.

`/stig`