Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2012–01–11, f V

Telefon: Fredrik Lindgren 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.
Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng.
(a) Beräkna längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.
(b) Skriv ned en ekvation för tangenplanet till ytan $z = x^2 + y^2$ i punkten $(1, 1, 2)$.
(c) Beräkna den linjära approximationen till $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \cos(x_2) \\ x_1 \sin(x_2) \end{bmatrix}$ kring punkten $(1, 0)$.
(d) Beräkna divergensen för vektorfältet $\mathbf{F} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k})$.

2. Beräkna massan av den triangulära plana skiva som har hörnen $(0, 0)$, $(0, 3L)$ och $(2L, 3L)$ och som har masstätheten $\delta(x, y) = \dfrac{k}{L}(2x + y)$. Här är konstanterna L `[m]` en längd och k en masstäthet `[kg/m`^{2}`]`.

3. (a) Skriv ned finita elementbasfunktionerna ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 för ett nät som består av en enda triangel T med hörnen (noderna) $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (1, 1)$. (2 p)
(b) Matrisen A med elementen $a_{ij} = \iint_T \nabla\phi_i(x, y) \cdot \nabla\phi_j(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kallas *styvhetsmatrisen*. Beräkna matrisen A. (4 p)
Tips: basfunktionerna är av formen $\phi(x, y) = a + bx + cy$ och lika med 1 en av noderna och 0 i de övriga.

4. Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{cases} x_1 \cos(6x_2) + 1 = 0 \\ x_1 \sin(x_2) - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

med startpunkt $(1, 0)$.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ med vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ och kurvan $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$.

6. Beräkna utflödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7. Undersök funktionen $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$ med avseende på lokala extrempunkter. (Du måste beräkna egenvärdena till Hesse-matrisen för full poäng.)

8. Bevisa partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}V$$

`/stig`

MVE255, 2012-01-11, lösningar.

1(a) $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\mathbf{r}'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

(b) Parametrisering: $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2+v^2 \end{cases}$

Tangenter: $\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2u\,\mathbf{k} \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2v\,\mathbf{k} \end{cases}$

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} =$$

$$= -2u\,\mathbf{i} - 2v\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

I punkten $(1,1,2)$: $\mathbf{N} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En ekvation för tangentplanet:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \bullet \mathbf{N} = 0$$

$$\big((x-1)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + (z-2)\mathbf{k}\big) \bullet (-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 0$$

$$-2(x-1) - 2(y-1) + (z-2) = 0$$

$$2x + 2y - z = 2$$

1(c) $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \cos(x_2) \\ x_1 \sin(x_2) \end{bmatrix}, \quad f(1,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \cos(x_1) & -x_1 \sin(x_1) \\ \sin(x_2) & x_1 \cos(x_1) \end{bmatrix}, \quad f'(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

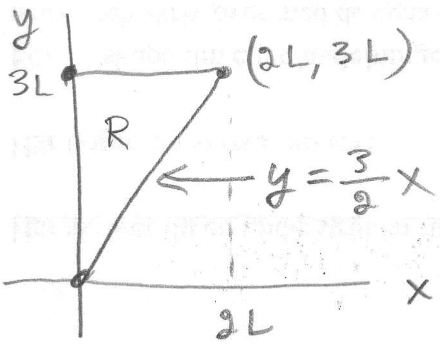
1(d) $\mathbb{F} = \frac{-y}{x^2+y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} =$$

$$= -y \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} + x \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

---

2)



$$m = \iint_R \delta \, dA =$$

$$= \iint_R \frac{k}{L}(2x+y)\, dA =$$

$$= \frac{k}{L} \int_0^{3L} \left(\int_0^{2y/3} (2x+y)\, dx \right) dy =$$

$$= \frac{k}{L} \int_0^{3L} \left[x^2 + yx \right]_0^{2y/3} dy = \frac{k}{L} \cdot \frac{10}{9} \int_0^{3L} y^2 \, dy =$$

$$= \frac{k}{L} \frac{10}{9} \frac{27L^3}{3} = 10\, kL^2 \quad \left[\frac{kg}{m^2} \cdot m^2 = kg \right]$$

3(a) $\phi(x,y) = a + bx + cy$

ϕ_1 ges av $\begin{cases} \phi_1(0,0) = a = 1 \\ \phi_1(1,0) = a + b = 0 \\ \phi_2(1,1) = a + b + c = 0 \end{cases}$

dvs $a = 1,\ b = -1,\ c = 0.$

ϕ_2 ges av $\begin{cases} \phi_2(0,0) = a = 0 \\ \phi_2(1,0) = a + b = 1 \\ \phi_2(1,1) = a + b + c = 0 \end{cases}$

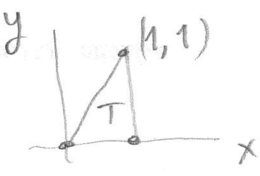
dvs $a = 0,\ b = 1,\ c = -1.$

ϕ_3 ges av $\begin{cases} \phi_3(0,0) = a = 0 \\ \phi_3(1,0) = a + b = 0 \\ \phi_3(1,1) = a + b + c = 1 \end{cases}$

dvs $a = 0,\ b = 0,\ c = 1.$

Vi får: $\begin{cases} \phi_1(x,y) = 1 - x \\ \phi_2(x,y) = x - y \\ \phi_3(x,y) = y \end{cases}$

(b) $\nabla\phi_1(x,y) = -\mathbf{i}$, $\nabla\phi_2(x,y) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\nabla\phi_3(x,y) = \mathbf{j}$



$$a_{11} = \iint_T \underbrace{\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_1}_{=1} \, dxdy = \frac{1}{2}$$

$$a_{21} = a_{12} = \iint_T \underbrace{\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2}_{=-1} \, dxdy = -\frac{1}{2}$$

$$a_{31} = a_{13} = \iint_T \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_3 \, dxdy = 0$$

$$a_{22} = \iint_T \underbrace{\nabla\phi_2 \cdot \nabla\phi_2}_{=2} \, dx\,dy = 1$$

$$a_{32} = a_{23} = \iint_T \underbrace{\nabla\phi_2 \cdot \nabla\phi_3}_{=-1} \, dx\,dy = -\frac{1}{2}$$

$$a_{33} = \iint_T \underbrace{\nabla\phi_3 \cdot \nabla\phi_3}_{=1} \, dx\,dy = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

---

4) $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \cos(6x_2) + 1 \\ x_1 \sin(x_2) - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \cos(6x_2) & -6x_1 \sin(6x_2) \\ \sin(x_2) & x_1 \cos(x_2) \end{bmatrix}$$

Residualen: $b = -f(1,0) = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Jacobi-matrisen: $A = f'(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lös den linjäriserade ekvationen:

$$Ah = b, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Uppdatera: $x = x + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

5) $\mathbb{F} = xy\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r} = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t \in [0,1]$

$\mathbf{r}' = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t^3 + 2t^4 + 2t^5\right) dt = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} = \frac{59}{60}$$

---

6) $\mathbb{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

$\nabla \cdot \mathbb{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$

Med Gauss divergenssats ger utflödet:

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbb{F}\,dV = \left\{ \begin{matrix} \text{sfäriska} \\ \text{koordinater} \end{matrix} \right\} =$$

$dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} 3\rho^2 \rho^2\,d\rho\, \sin\phi\, d\phi\, d\theta =$$

$$= 3\int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = 3 \cdot \frac{32}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = 384\pi$$

7) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

Kritiska punkter ges av

$$\begin{cases} f'_x = -3x^2 + 4y = 0 & (1) \\ f'_y = 4x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) ger $x = y$

(1) ger sedan $-3x^2 + 4x = 0$, $-x(3x-4) = 0$

med lösningarna $x = 0$, $x = 4/3$.

Två kritiska punkter: $(0,0)$, $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

Hesse-matrisen:

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

I punkten $(0,0)$: $f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

med egenvärdena $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{20}$.

Olika tecken: sadelpunkt i $(0,0)$.

I punkten $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$: $f''(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

med egenvärdena $-6 \pm \sqrt{20}$.

Båda är negativa: lokalt maximum i $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. (Jag använde: $4 < \sqrt{20} < 5$.)

8) Se kompendiet.

/Stig