Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2012–05–22, f V

Telefon: Oskar Hamlet 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: onsdag 13 juni, 10–12, hos Stig Larsson.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng.

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till grafen $z = xy$ i punkten $(1, 1, 1)$.

(b) Beräkna integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ och C är den räta linjen från $(0, 0, 0)$ till $(1, 2, 3)$.

(c) Beräkna riktningsderivatan av $\mathbf{f} = x^2 + y^2 + z^2$ i punkten (1,1,1) i riktningen $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

(d) Beskriv hur man plottar grafen $z = xy$ i Matlab.

2. Beräkna integralen $\iiint_D xy \,\mathrm{d}V$ där D är pyramiden med hörn i punkterna $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

3. (a) Undersök funktionen $f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$ med avseende på lokala extrempunkter. (Du måste beräkna egenvärdena till Hesse-matrisen för full poäng.) (3 p)

(b) Beskriv på ett begripligt sätt hur man gör detta med Matlab i Datorövning 3. (3 p)

4. (a) Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Bestäm först hur många rötter det finns och ungefär var de ligger. Välj sedan en lämplig startpunkt. (3 p)

(b) Beskriv hur man löser detta med programmet `newton.m` från Datorövning 2. Du behöver inte skriva ned `newton.m` och `jacobi.m` men du ska skriva ned den m-fil och kommando-rader som behövs på ett begripligt sätt. (3 p)

5. Vi studerar värmeledning i kuben $D = \{(x, y, z) : 0 \le x, y, z \le L\}$. Vi har inre värmekällor med tätheten $8xyz$ `[J/(m`^{3}` s)]` och värmeledningskoefficienten varierar enligt formeln $5(1 + y/L)$ `[J/(m K s)]`. På ytorna $y = 0$ och $y = L$ har vi isolering med värmeöverföringskoefficienten 7 `[J/(m`^{2}` s K)]`. De övriga sidorna har ingen isolering alls. Omgivningens temperatur är 60 `[K]`. Skriv ned randvärdesproblemet. (Skriv inte bara vad det blir utan motivera och formulera väl.)

6. Använd divergenssatsen för att beräkna flödesintegralen $\iint_M \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \,\mathrm{d}S$, där $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ och M är den del av konytan $z^2 = x^2 + y^2$ som ligger mellan planen $z = 1$ och $z = 2$. Använd nedåtriktad normalvektor. (Obs att planen $z = 1$ och $z = 2$ ingår inte i mantelytan M.)

7. Beräkna flödesintegralen i uppgift 6 utan att använda divergenssatsen.

8. Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) = f \quad \text{i } D, \\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S. \end{cases}$$

/stig

MVE255/TMV191 2012-05-22

1(a) $f(x,y) = xy$, $f(1,1) = 1$

$f_1'(x,y) = y$, $f_1'(1,1) = 1$

$f_2'(x,y) = x$, $f_2'(1,1) = 1$

$L(x,y) = f(1,1) + f_1'(1,1)(x-1) + f_2'(1,1)(y-1)$

$= 1 + x - 1 + y - 1 = x + y - 1$

Ekvationen för tangentplanet för grafen $z = xy$ i $(1,1,1)$ är grafen för linjäriseringen:

$$z = x + y - 1$$

dvs $x + y - z = 1$

(b) Parametrisera linjen:

$$C: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = 0 + 3t \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

$\bar{r} = t\bar{i} + 2t\bar{j} + 3t\bar{k}$, $t \in [0,1]$

$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $d\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{dt}dt = (\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k})dt$

$\bar{F} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k} = t^2\bar{i} + (2t)^2\bar{j} + (3t)^2\bar{k}$ på C.

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_0^1 \left(t^2\bar{i} + 4t^2\bar{j} + 9t^2\bar{k}\right) \cdot \left(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}\right) dt$$

$$= \int_0^1 (1 + 8 + 27)t^2\, dt = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12$$

(c) $f = x^2 + y^2 + z^2$

$\bar{\nabla} f = 2x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j} + 2z\,\bar{k}$, $\quad \bar{\nabla} f(1,1,1) = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$

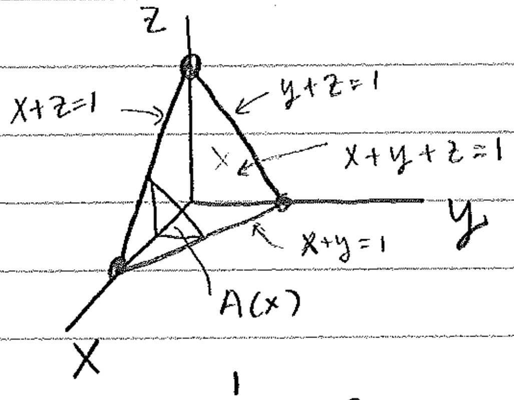
$\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\quad \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k})$

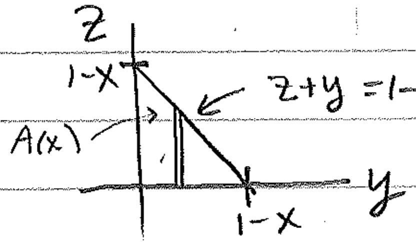
$$D_{\bar{v}} f(1,1,1) = \bar{\nabla} f(1,1,1) \cdot \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2+4+6) = \frac{12}{\sqrt{14}}$$

d)

```
>> x = linspace(-1,1)
>> [X,Y] = meshgrid(x,x);
>> Z = X.*Y;
>> surf(X,Y,Z)
```

2.





$$\iiint_D xy\,dV = \int_0^1 \iint_{A(x)} xy\,dA\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xy\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x(1-x)y - xy^2\right) dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[x(1-x)\frac{y^2}{2} - x\frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x(1-x)^3 - \frac{1}{3}x(1-x)^3 \right) dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{20} = \frac{1}{120}$$

3. (a) $f(x,y) = 3xy - 3x + 9y$

Inga singulära punkter.

Kritiska punkter ges av

$$f'(x,y)^T = \begin{bmatrix} f_1'(x,y) \\ f_2'(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y-3 \\ 3x+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y=1,\ x=-3$

En kritisk punkt $(-3,1)$.

Hesse-matrisen:

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},\quad f''(-3,1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenvärdena ges av $\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0$

$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3$, olika tecken

Sadelpunkt i $(-3,1)$.

b) filen funk.m:

```
function y=funk(x)
y= 3*x(1)*x(2) - 3*x(1) + 9*x(2);
```

filen gradfunk.m:

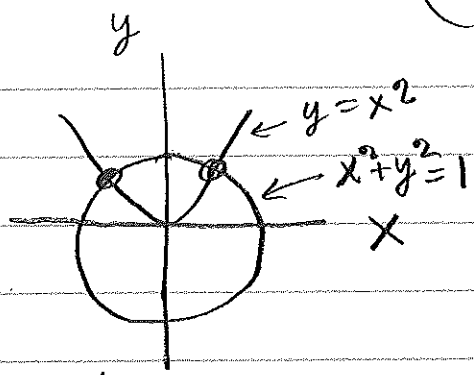
```
function g = gradfunk(x)
  g = jacobi(@funk, x);
  g = g';
```

```
>> x = newton(@gradfunk, [0;0], 1e-6)
>> H = jacobi(@gradfunk, x)
>> eig(H)
```

4

4. (a) $f(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 - y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{bmatrix}$

$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$



Vi ser att det finns två rötter.
Startpunkt (0,0) och (0,1) fungerar ej för då blir matrisen singulär.
Vi får $x = (1,0)$.

residualen: $b = -f(1,0) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

jacobimatrisen: $A = f'(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

linjäriserade ekv: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

gauss: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\swarrow}{-1} \approx \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{cases} 2h_1 - h_2 = -1 \\ h_2 = 1 \end{cases}$

$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

uppdatera: $x = x + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

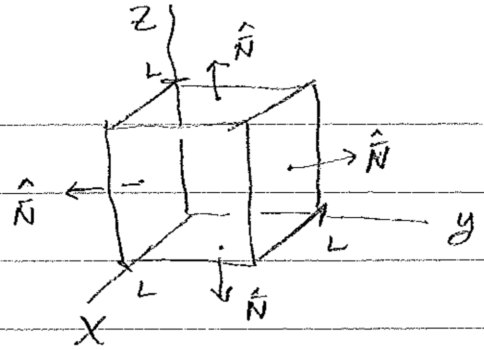
b) filen funk.m

```
function y = funk(x)
y = [ x(1)^2 - x(2);  x(1)^2 + x(2)^2 - 1 ];
```

```
>> x = newton(@funk, [1;0], 1e-6)
```

(5

5.



$$-\bar{\nabla}\cdot\left(5(1+y/L)\,\bar{\nabla}u\right) = 8xyz \quad \text{i } D$$

På ytan $y=0$: $\hat{N} = -\bar{j}$, $a = 5(1+0/L) = 5$

$k = 7$, $u_A = 60$

Randvillkoret blir: $a D_{\hat{N}} u + k(u - u_A) = 0$

$$-5\frac{\partial u}{\partial y} + 7(u-60) = 0$$

På ytan $y=L$: $\hat{N} = \bar{j}$, $a = 5(1+L/L) = 10$

$k = 7$, $u_A = 60$

Randvillkoret blir: $10\frac{\partial u}{\partial y} + 7(u-60) = 0$

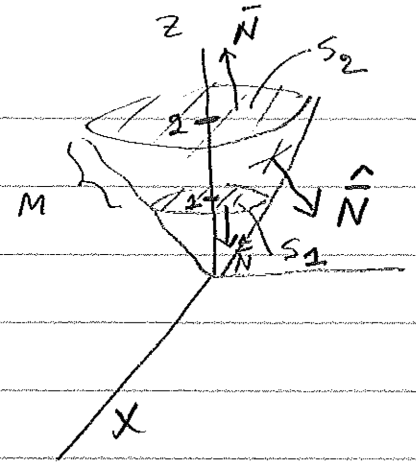
På övriga sidor: $u = 60$.

Randvärdesproblemet:

$$\begin{cases} -\bar{\nabla}\cdot\left((5+y/L)\,\bar{\nabla}u\right) = 8xyz & \text{i } D \\ -5\frac{\partial u}{\partial y} + 7(u-60) = 0 & \text{för } y=0 \\ 10\frac{\partial u}{\partial y} + 7(u-60) = 0 & \text{för } y=L \\ u = 60 & \text{för } x=0,\ x=L,\ z=0,\ z=L \end{cases}$$

6. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + 2z\bar{k}$

$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = 1 + 1 + 2 = 4$



Lägg till botten S_1 och toppen S_2.

Divergenssatsen:

$$\iint_M \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS + \iint_{S_1} \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS + \iint_{S_2} \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iiint_D \bar{\nabla} \cdot \bar{F}\, dV$$

Här är $\displaystyle\iiint_D \bar{\nabla} \cdot \bar{F}\, dV = \iiint_D 4\, dV = 4 \operatorname{vol}(D) =$

$$= 4\left(\frac{1}{3} \operatorname{area}(S_2) \cdot 2 - \frac{1}{3} \operatorname{area}(S_1) \cdot 1\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(\pi \cdot 4 \cdot 2 - \pi \cdot 1 \cdot 1\right) = \frac{28}{3}\pi$$

för konens volym $= \frac{1}{3}$ basytan $\cdot$ höjden

S_1: $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 1$, $\hat{N} = -\bar{k}$, $\bar{F} \cdot \hat{N} = -2$ på S_1

$$\iint_{S_1} \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS = -2 \operatorname{area}(S_1) = -2 \cdot \pi$$

S_2: $x^2 + y^2 \le 4$, $z = 2$, $\hat{N} = \bar{k}$, $\bar{F} \cdot \hat{N} = 4$

$$\iint_{S_2} \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS = 4 \operatorname{area}(S_2) = 4 \cdot \pi \cdot 4 = 16\pi$$

Alltså: $\displaystyle\iint_M \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iiint_D \bar{\nabla} \cdot \bar{F}\, dV - \iint_{S_1} \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS - \iint_{S_2} \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS =$

$$= \frac{28}{3}\pi + 2\pi - 16\pi = -\frac{14}{3}\pi.$$

7. Parametrisera M med cylinderkoordinater. $x^2+y^2=z^2$, dvs $r^2=z^2$.

$$M: \begin{cases} x = z\cos\theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = z\sin\theta & z \in [1,2] \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = -z\sin\theta\,\bar{i} + z\cos\theta\,\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \cos\theta\,\bar{i} + \sin\theta\,\bar{j} + \bar{k}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= z(\cos\theta\,\bar{i} + \sin\theta\,\bar{j} - \bar{k})$$

$d\bar{S} = \hat{N}\,dS = \pm\, z(\cos\theta\,\bar{i} + \sin\theta\,\bar{j} - \bar{k})\,d\theta dz$, välj $+$, medåt

På M: $\bar{F} = z\cos\theta\,\bar{i} + z\sin\theta\,\bar{j} + 2z\,\bar{k}$

$$\iint_M \bar{F}\cdot\hat{N}\,dS = \int_1^2\int_0^{2\pi} (z\cos\theta\,\bar{i} + z\sin\theta\,\bar{j} + 2z\,\bar{k})\cdot$$

$$\cdot\, z(\cos\theta\,\bar{i} + \sin\theta\,\bar{j} - \bar{k})\,d\theta dz$$

$$= \int_1^2\int_0^{2\pi} z^2\Big[\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} - 2\Big]\,d\theta\,dz$$

$$= -\int_0^1\int_0^{2\pi} z^2 \quad d\theta dz = -2\pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= -2\pi\,\frac{7}{3} = -\frac{14}{3}\pi$$

8. Se FEM2.