Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2013–01–16, f M

Telefon: Adam Andersson 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng.

(a) Bestäm längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\mathbf{i} + a\sin(t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Undersök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

(c) Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = x^2 \sin(2y)$ i punkten $(1, \pi/2)$ i riktningen $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

(d) Beskriv hur man plottar grafen $z = xy^2$ i Matlab.

2. Beräkna integralen genom att införa polära koordinater:

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

3. En rektangulär låda har ena sidan i xy-planet med ett hörn i origo. Det motsatta hörnet ligger på planet

$$6x + 4y + 3z = 24.$$

Beräkna den maximala volymen av en sådan låda. Tips: hörnen är alltså $(0, 0, 0)$, $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(x, y, 0)$, $(0, 0, z)$, $(x, 0, z)$, $(0, y, z)$, (x, y, z).

4. (a) Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{cases} x_1^5 + x_2^4 + x_3^4 - 1 = 0 \\ x_2 x_3^2 - x_3 = 0 \\ x_3^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

med startpunkt $(1, 1, 1)$. (3p)

(b) Beskriv hur man löser detta med programmet `newton.m` från Datorövning 2. Du behöver inte skriva ned `newton.m` och `jacobi.m` men du ska skriva ned den m-fil och kommando-rader som behövs på ett begripligt sätt. (3 p)

5. Beräkna volymen av området som bestäms av $z^2 \geq x^2 + y^2$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

6. (a) Beräkna utflödet av vektorfältet $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (1 - x^2 - y^2)z^2\mathbf{k}$ genom begränsningsytan S till cylindern D som ges av $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

(b) Beräkna den del av utflödet som går genom mantelytan S_1 som ges av $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

7. Vi studerar värmeledning i kuben $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq L\}$. Vi har inga värmekällor och värmeledningskoefficienten varierar enligt formeln $5(1 + x/L)$ `[J/(m K s)]`. På ytorna $x = 0$ och $x = L$ har vi isolering med värmeöverföringskoefficienten 7 `[J/(m^2 s K)]`. De övriga sidorna har ingen isolering alls. Omgivningens temperatur är 40 `[K]`. Skriv ned randvärdesproblemet. (Skriv inte bara vad det blir utan motivera och formulera väl.)

8. Härled värmeledningsekvationen $-\nabla \cdot (a\nabla u) = f \quad \text{i } D$.

/stig

tom sida

MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2013–01–16, f M. Lösningar.

---

1. (a) $\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\mathbf{i} + a\sin(t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(t) = -a\sin(t)\mathbf{i} + a\cos(t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$, $\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t$,

$$L = \int_C \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

Obs: på tentan stod det $\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\mathbf{i} + b\sin(t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, vilket blir för svårt.

(b) Gränsvärdet existerar ej, ty

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2-0^2}{x^2+0^2} = 1, \qquad \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0^2-y^2}{0^2+y^2} = -1.$$

(c) Derivera: $\nabla f(x,y) = 2x\sin(2y)\mathbf{i} + 2x^2\cos(2y)\mathbf{j}$, $\nabla f(1,\frac{\pi}{2}) = 2\sin(\pi)\mathbf{i} + 2\cos(\pi)\mathbf{j} = -2\mathbf{j}$. Normera: $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{5}(3\mathbf{i}-4\mathbf{j})$. Riktningsderivatan blir $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{v}}}f(1,\frac{\pi}{2}) = \nabla f(1,\frac{\pi}{2})\cdot\hat{\mathbf{v}} = \frac{8}{5}$.

(d)

```
>> x=linspace(-1,1)
>> [X,Y]=meshgrid(x,x)
>> Z=X.*Y.^2
>> surf(X,Y,Z)
```

2. Integralen är

$$\int_{x=-2}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Polära koordinater

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

Integrationsområdet är $-2 \le x \le 2$, $0 \le y^2 \le 4-x^2$, dvs övre halvcirkeln $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$. Integralen blir

$$\int_0^{\pi}\int_0^2 r^2\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi\Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^2 = \pi\frac{16}{4} = 4\pi$$

3. Volymen är $V = xyz$, där $z = \frac{1}{3}(24-6x-4y)$. Vi ska alltså maximera funktionen

$$V(x,y) = \frac{1}{3}xy(24-6x-4y) = \frac{1}{3}(24xy - 6x^2y - 4xy^2)$$

över det triangulära området i xy-planet som ges av

$$x \ge 0,\ y \ge 0,\ 6x+4y \le 24.$$

Vi undersöker de typer av punkter där maximum kan inträffa.

1. *Singulära punkter:* finns inga.

2. *Kritiska punkter* ges av

$$V'_x(x,y) = \frac{1}{3}(24y - 12xy - 4y^2) = \frac{1}{3}y(24-12x-4y) = 0,$$
$$V'_y(x,y) = \frac{1}{3}(24x - 6x^2 - 8xy) = \frac{1}{3}x(24-6x-8y) = 0.$$

Med $x=0$ får vi $y=0$ eller $y=6$. Alltså $(0,0)$ och $(0,6)$. Med $y=0$ får vi $x=0$ eller $x=4$. Alltså $(0,0)$ och $(4,0)$. Dessa är på randen.

Med $x \neq 0$, $y \neq 0$ får vi

$$\begin{aligned} 24 - 12x - 4y &= 0, \\ 24 - 6x - 8y &= 0. \end{aligned}$$

dvs $x = \frac{4}{3}$, $y = 2$. Alltså $(\frac{4}{3}, 2)$. Den enda kritiska punkten som är i det inre av området är $(\frac{4}{3}, 2)$.
Vi beräknar Hesse-matrisen:

$$H(x,y) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -12y & 24 - 12x - 8y \\ 24 - 12x - 8y & -8x \end{bmatrix}, \quad H(\tfrac{4}{3}, 2) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -24 & -8 \\ -8 & \frac{32}{3} \end{bmatrix}$$

Egenvärdena för $3H(\frac{4}{3}, 2)$ ges av

$$\begin{aligned} &(-24 - \lambda)(\tfrac{32}{3} - \lambda) - 64 = \lambda^2 + \tfrac{104}{3}\lambda + 192 = 0 \\ &\lambda = -\tfrac{52}{3} \pm \sqrt{(\tfrac{52}{3})^2 - 192} = -a \pm b \quad \text{med } 0 < b < a \approx 17. \end{aligned}$$

Man ser att båda är negativa. Maximum.

3. *Randpunkter.* På randen $x = 0$: $V(0, y) = 0$. På randen $y = 0$: $V(x, 0) = 0$. På randen $6x + 4y = 24$: $V = 0$.

Vi ser att maximum är $V(\frac{4}{3}, 2) = \frac{64}{9}$.

4. (a)

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^5 + x_2^4 + x_3^4 - 1 \\ x_2 x_3^2 - x_3 \\ x_3^4 - 1 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 5x_1^4 & 4x_2^3 & 4x_3^3 \\ 0 & x_3^2 & 2x_2x_3 - 1 \\ 0 & 0 & 4x_3^3 \end{bmatrix},$$

Residualen: $b = -f(1,1,1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jacobi-matrisen: $A = f'(1,1,1) = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Lös den linjäriserade ekvationen: $Ah = b$, $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad h = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Uppdatera: $x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) Filen `funk.m`:

```
function y=funk(x)
y=[x(1)^5+x(2)^4+x(3)^4-1; x(2)*x(3)^2-x(3); x(3)^4-1]
```

Kommandoraden:

```
>> x=newton(@funk, [1,1,1], 1e-6)
```

5. Vi använder sfäriska koordinater ρ, θ, ϕ. Området är ovanför den halva konen $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ och innanför sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Området ges av

$$0 \leq \rho \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \phi_0.$$

Vinkeln ϕ_0 bestäms av konens öppningsvinkel:

$$z^2 = x^2 + y^2,\ \rho^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{=z^2} + z^2 = 2z^2 = 2(\rho \cos \phi_0)^2,\ \cos \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \phi_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Volymen blir

$$\begin{aligned} V = \iiint_D \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} 9 \sin \phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \, 9(-\cos(\pi/4) + \cos(0)) = 18\pi(1 - 1/\sqrt{2}) = 9\pi(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

6. (a) Vi använder divergenssatsen och cylinderkoordinater r, θ, z. Vi beräknar

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 2(1 - x^2 - y^2)z = 2(1 - r^2)z.$$

Utflödet blir

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 2(1 - r^2) z \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z \\ &= 2 \int_0^1 z \, \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 (r - r^3) \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(b) På mantelytan S_1 har vi $\hat{\mathbf{N}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ så att $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$. Alltså: $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S = 0$.

7. Vi har $a(x, y, z) = 5(1 + x/L)$, $f = 0$, $g = 0$. Differentialekvationen är

$$-\nabla \cdot \big(a \nabla u\big) = -\nabla \cdot \big(5(1 + x/L) \nabla u(x, y, z)\big) = 0.$$

På ytan $x = L$ har vi $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{i}$ och $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} = \frac{\partial}{\partial x}$ och $a(L, y, z) = 5(1 + 1) = 10$, $k = 7$, $u_{\mathrm{A}} = 40$. Vi får

$$a \mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = 10 \frac{\partial u(L, y, z)}{\partial x} + 7\big(u(L, y, z) - 40\big) = 0.$$

På ytan $x = 0$ har vi $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{i}$ och $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} = -\frac{\partial}{\partial x}$ och $a(L, y, z) = 5(1 + 0) = 5$, $k = 7$, $u_{\mathrm{A}} = 40$. Vi får

$$a \mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = -5 \frac{\partial u(0, y, z)}{\partial x} + 7\big(u(0, y, z) - 40\big) = 0.$$

På övriga sidor gäller $u = 40$. Randvärdesproblemet blir

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \big(5(1 + x/L) \nabla u(x, y, z)\big) = 0, \\ -5 \dfrac{\partial u(0, y, z)}{\partial x} + 7\big(u(0, y, z) - 40\big) = 0, \\ 10 \dfrac{\partial u(L, y, z)}{\partial x} + 7\big(u(L, y, z) - 40\big) = 0, \\ u(x, 0, z) = u(x, L, z) = u(x, y, 0) = u(x, y, L) = 40, \end{cases}$$

för $0 \leq x, y, z \leq L$.

8. Se FEM2.

`/stig`