Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2013–05–28, f V

Telefon: Anders Martinsson 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: onsdag 19 juni, 10–12, hos Stig Larsson.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng.

(a) Bestäm arbetet som uträttas av kraftfältet $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ på en partikel som rör sig längs kurvan $C\colon \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln(t)\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$.

(b) Undersök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

(c) Bestäm tangentlinjen till kurvan $C\colon \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln(t)\mathbf{k}$ i punkten $(2, 1, 0)$. Tangentlinjen ska anges på parameterform.

(d) Beskriv hur man plottar kurvan $C\colon \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln(t)\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$ i Matlab.

2. Beräkna integralen

$$\iint_R \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}A,$$

där R är området som begränsas av positiva y-axeln, linjen $y = 1$ och kurvan $y = \sqrt{x}$.

3. (a) Bestäm alla lokala max-, min- och sadelpunkter till funktionen $f(x, y) = x^2 - xy + y^3$. (3 p)

(b) Beskriv hur man gör detta med Matlab. (3 p)

4. (a) Randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -\,\mathrm{D}(a(x)\mathrm{D}u(x)) &= 0 \quad \text{för } x \in (0, L),\\ u(0) = u_0,\ u(L) &= u_L, \end{aligned}$$

beskriver ett värmeledningsproblem. Beskriv med ord vilket värmeledningsproblem det är. Ange vad de olika termerna betyder. (Skriv kortfattat och bra, annars ingen poäng.)

(b) Lös detta randvärdesproblem med $a(x) = \dfrac{k}{1 + x/L}$ där k är en konstant.

(c) Antag att $u_0 - u_L = 10$ K och $k = 10$ J/(mKs). Bestäm tjockleken L så att värmeflödestätheten blir 100 J/(m^{2}s).

5. Beräkna integralen $\iiint_R x\,\mathrm{d}V$, där R är den första oktanten av enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ uppåt genom ytan S som är den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet.

7. (a) Härled Newtons metod för system av formen $f(x) = 0$. (2 p)

(b) Hitta på ett exempel på ett sådant system (med minst två ekvationer) och genomför ett steg av Newtons metod. (4 p)

8. Härled partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi\,\mathrm{d}V$$

/stig

TMV191
MVE255 2013-05-28

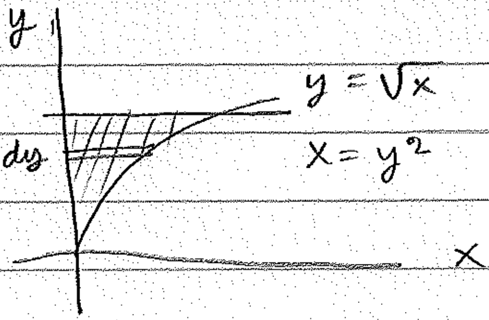
1. (a) $W = \int_{\mathscr{C}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \frac{13}{4}$

(b) 0, bevis: $\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} |y| \leq |y| \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$

(c) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 + t \end{cases}$

(d) plot3D

2.



$$\iint_R e^{x/y} \, dA = $$

$$= \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{x/y} \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \left[y e^{x/y} \right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 (y e^y - y) \, dy = \{\text{P.I.}\}$$

$$= \left[y e^y \right]_0^1 - \int_0^1 e^y \, dy - \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = e - (e-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3. a) $f = x^2 - xy - y^3$

$$\begin{cases} f'_x = 2x - y = 0 \\ f'_y = -x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x = \frac{1}{12} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{bmatrix}$$

$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$ sadel

$f''(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} > 0$ lok. min.

(b) Se datorövning 3.

4. (a) Värmeledning i en platta med ingen isolering på ytorna. Omgivande temp är u_0 till vänster och u_L till höger. Inga inre värmekällor.

(b) $$-D\left(\frac{k}{1+x/L}Du(x)\right)=0$$

(*) $$-\frac{k}{1+x/L}Du(x)=C_1$$

$$Du(x)=-\left(1+\frac{x}{L}\right)\frac{C_1}{k}$$

$$u(x)=-\frac{(1+x/L)^2}{2}\frac{C_1L}{k}+C_2$$

$$\begin{cases} u_0=u(0)=-\frac{1}{2}\frac{C_1L}{k}+C_2 \\ u_L=u(L)=-\frac{4}{2}\frac{C_1L}{k}+C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2=\frac{1}{2}\frac{C_1L}{k}=-\frac{1}{3}(u_L-u_0)$$

$$u(x)=\frac{1}{3}(u_L-u_0)\left(\left(1+\frac{x}{L}\right)^2-1\right)$$

Flödestätheten är i (*):

$$j=-aDu=-\frac{k}{1+x/L}Du(x)=C_1=-\frac{2}{3}(u_L-u_0)\frac{k}{L}$$

Med $j=100\ \mathrm{J/m^2s}$, $u_L-u_0=-10\ \mathrm{K}$, $k=10\ \mathrm{J/mKs}$

fås $L=-\frac{2}{3}(u_L-u_0)\frac{k}{j}=\frac{2}{3}\frac{10\cdot10}{100}=\frac{2}{3}\ \mathrm{m}$

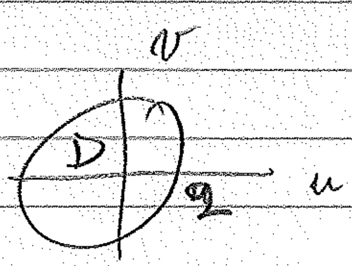
5. $\iiint\limits_R x\,dV = \{\text{sfäriska}\} =$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1} (\rho \sin\phi \cos\theta)\,\rho^2\,d\rho\,\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$= \dots = \frac{\pi}{16}$$

6. Graf. $z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0.$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4 - u^2 - v^2 \end{cases} \qquad u^2 + v^2 \leq 4$$



$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = 2u\,\mathbf{i} + 2v\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{D} \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(2u\,\mathbf{i} + 2v\,\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\,\mathbf{k} \right) \cdot \left(2u\,\mathbf{i} + 2v\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (3r^2 + 4)\, r\,dr\,d\theta = \dots = 40\pi$$

7. Se kurslitteraturen

8. — " —