Matematik Chalmers

Tentamen MVE255 (TMV191) Matematisk analys i flera variabler, 2014–08–30 f V

Telefon: Åse Fahlander 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1 och 2, totalt 20 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret.

Uppgift 3–7 är värda 6 poäng vardera, totalt 30. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: onsdag 17 sept, 12–13, hos Stig Larsson.

---

1. Frågor om datorövningarna. Här krävs tillfredställande svar på alla 5 delfrågorna. Varje deluppgift är värd 1 poäng, totalt 5.

(a) Vad används Matlab-funktionen `meshgrid` till?

(b) Hur beräknar man gradienten till funktionen $x_1x_2x_3$ i punkten (1,1,1) med `jacobi.m`?

(c) Hur beräknar man Hesse-matrisen till en funktion med Matlab?

(d) Vilka randvillkor har man när filen `BdryData.m` innehåller koden

```
if tag==1  k=1e8;  uA=5;   g=1; end
if tag==2  k=4;    uA=3;   g=0; end
```

(e) PDE Toolbox har dessa beteckningar för randvillkor:

$$\begin{aligned} &n \cdot (c\nabla u) + qu = g \qquad && \text{på } S_2 \text{ (Neumann)},\\ &hu = r && \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{aligned}$$

Vad ska man fylla i för värden på en rand som är perfekt isolerad?

2. Varje deluppgift är värd 3 poäng, totalt 15.

(a) Avgör om följande gränsvärde existerar: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2}$.

(b) Beräkna ∇u då $u(x,y) = f(x-y, x^2-y^2)$.

(c) Beräkna $\displaystyle\iint_T xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ för triangeln T med hörn i (0,0), (2,0), (1,1).

(d) Beräkna $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (y-x)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ och C är kurvan från (0,0) till $(\pi, 0)$ som ges av $y = \sin^3(x)$.

(e) Skriv ned en ekvation för tangentlinjen till kurvan $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ i punkten $(-8,-2,4)$.

3. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = x^2y - x - y$ på den slutna triangeln med hörnen (0,0), (2,0) och (0,2).

4. Härled svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & \text{i } D,\\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S. \end{cases}$$

5. Beräkna volymen av det område som begränsas av graferna $z = \sqrt{x^2+y^2}$ och $z = 2 - x^2 - y^2$.

Vänd!

6. Beräkna flödesintegralen $\iint_S (x^3, y^3, -z^3) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, där S är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ med normalriktning utåt.

7. Härled randvillkoret för värmeledning:

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S.$$

Förklara vad de olika koefficienterna betyder och ange deras SI-enheter.

`/stig`

MVE255. 2014-08-30. Lösningar.

1.(a) Meshgrid skapar matriser som beskriver nätet som används när man plottar funktioner av 2 och 3 variabler.

(b) >> g = jacobi(@(x)(x(1)*x(2)*x(3)), [1;1;1])
>> g = g' % gradienten ska vara en kolonn.

(c) Filen gradfunk.m :
function g = gradfunk(x)

$$g = \text{jacobi}(\underbrace{@(x)(x(1)*x(2)*x(3))}_{\text{eller } @\text{funk}}, x);$$
g = g';

>> H = jacobi(gradfunk, x)

(d) $u(0) = 5, \quad a(1)u'(1) + 4(u(1) - 3) = 0$

(e) Neumann, $q = 0, \quad g = 0$

2. (a) Existerar ej, för på linjen $y = 0$ får vi

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1 \text{ då } x \to 0$$

och på linjen $x = y$ får vi

$$\frac{\sin(2x^2)}{x^2} = 2\,\frac{\sin(2x^2)}{2x^2} \to 2.$$

(b) $u(x,y) = f(x-y,\ x^2-y^2)$

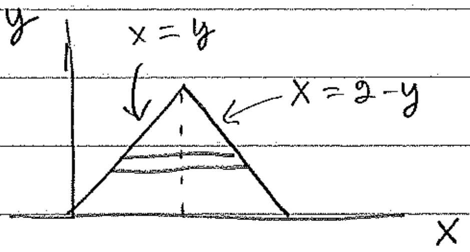
Kedjeregeln: $\left(s = x-y,\ t = x^2-y^2 \right)$

$$\nabla u = (u'_x, u'_y) = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} \right)$$

$$= \left(f'_1(x-y, x^2-y^2) + f'_2(x-y, x^2-y^2)\cdot 2x, \right.$$

$$\left. -f'_1(x-y, x^2-y^2) - f'_2(x-y, x^2-y^2)\,2y \right)$$

(c)



$$\iint_T xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} xy\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_y^{2-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left((2-y)^2 y - y^3 \right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (4y - 4y^2)\,dy = 2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(d) $\mathbb{F} = (y-x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Konservativt?

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 1 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$ Ja!

Potential ges av: $\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = y - x \\[2mm] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = x \end{cases}$

Vi får $\begin{cases} \phi = yx - \frac{1}{2}x^2 + f(y) \\ \phi = xy + g(x) \end{cases}$

Välj $f(y) = c$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c$, så att

$\phi(x,y) = xy - \frac{1}{2}x^2 + c$

Integralen blir $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\pi, 0) - \phi(0,0) =$

$= -\frac{1}{2}\pi^2$.

(e) $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(-2) = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

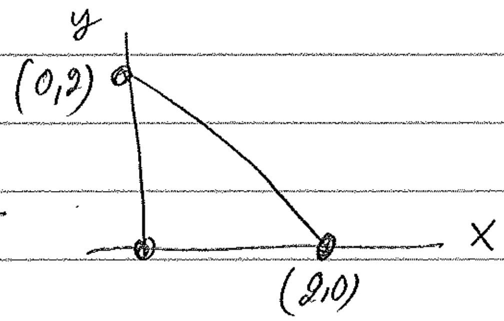
$\mathbf{r}'(-2) = 12\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

Tangentens ekvation:

$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{r}'(t_0)$

$\mathbf{r}(t) = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} + t(12\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$

3. $f(x,y) = x^2y - x - y$



Stationära punkter ges av

$\begin{cases} f'_x = 2xy - 1 = 0 \\ f'_y = x^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2y} \\ x = \pm 1 \end{cases}$

dvs $(-1, -\frac{1}{2})$ och $(1, \frac{1}{2})$. Endast $(1, \frac{1}{2})$ är i triangeln och $f(1, \frac{1}{2}) = -1$.

På randen $y=0$: $f(x,0) = -x$ med maximum $f(0,0)=0$ och minimum $f(2,0)=-2$

På randen $x=0$: $f(0,y) = -y$ med max. $f(0,0)=0$ och min. $f(0,2) = -2$.

På randen $y=2-x$: $f(x,2-x) = x^2(2-x) - x - (2-x) =$

$$= 2x^2 - x^3 - x - 2 + x = 2x^2 - x^3 - 2$$

Stat. punkter: $4x - 3x^2 = 0$

$$x(4-3x) = 0$$

$$x=0 \text{ eller } x = \frac{4}{3}$$

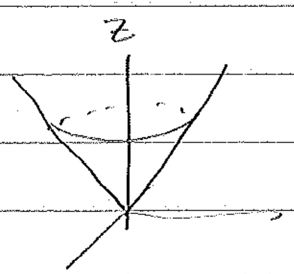
Här har vi $f(0,2) = -2$ och $f(\frac{4}{3}, 2-\frac{4}{3}) =$

$= 2\cdot\frac{16}{9} - \frac{64}{27} - 2 = \frac{32}{27} - 2$ mellan 0 och -2.

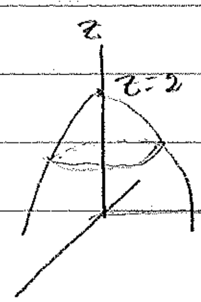
Genom att jämföra dessa värden ser vi att maximum är $f(0,0)=0$ och minimum är $f(0,2) = f(2,0) = -2$.

4. Se FEM2,

5. Ytan $z=\sqrt{x^2+y^2}$, eller $z=r$, är en uppåtriktad kon.



Ytan $z=2-x^2-y^2$, eller $z=2-r^2$, är en nedåtriktad paraboloid.

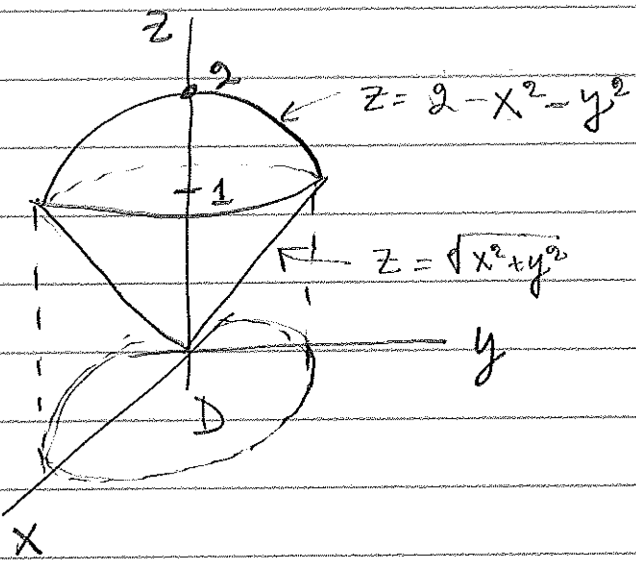


De skär varandra då $z=r=2-r^2$, dvs då $r=1$.

Den sökta volymen är en glass-strut.

Basytan D är enhetsskivan

$D: \; x^2+y^2 \le 1$



$$V = \iint_D \left((2 - x^2 + y^2) - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx\,dy =$$

$$= \{\text{polära}\} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2 - r^2 - r)\, r\,dr\,d\theta = \frac{5\pi}{6}$$

6. $\mathbb{F} = (x^3, y^3, -z^3)$

$\nabla \cdot \mathbb{F} = 3x^2 + 3y^2 - 3z^2$

Divergenssatsen och sfäriska koord:

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iiint_B \nabla\cdot\mathbb{F}\, dV = 3\iiint_B (x^2+y^2-z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \left((\rho\sin\phi\cos\theta)^2 + (\rho\sin\phi\sin\theta)^2 - (\rho\cos\phi)^2 \right)\rho^2\,d\rho\,\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^4\,d\rho \int_0^{\pi} \underbrace{(\sin^2\phi - \cos^2\phi)}_{1-2\cos^2\phi} \sin\phi\,d\phi = 3\cdot 2\pi\,\frac{a^5}{5}\int_{-1}^{1}(1-2u^2)\,du = \frac{4\pi a^5}{5}$$

$u = \cos\phi$

7. Se FEM2. /stig