Matematik Chalmers

Tentamen MVE255 (TMV191) Matematisk analys i flera variabler, 2015–04–15 f V

Telefon: Timo Hirscher 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1 och 2, totalt 20 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret.

Uppgift 3–7 är värda 6 poäng vardera, totalt 30. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Frågor om datorövningarna. Här krävs tillfredställande svar på alla 5 delfrågorna. Varje deluppgift är värd 1 poäng, totalt 5.

(a) Hur plottar man grafen till funktionen $z = 1 + x^2 + y^2$?

(b) Hur beräknar man gradienten till funktionen $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ i punkten (1,1) med `jacobi.m`?

(c) Hur löser man ekvationssystemet $x^2 + y^2 = 1; xy = 1$ med programmet `newton.m`?

(d) Vilka randvillkor har man när filen `BdryData.m` innehåller koden

```
if tag==1  k=1e8;  uA=3;   g=0; end
if tag==2  k=4;    uA=5;   g=2; end
```

(e) PDE Toolbox har dessa beteckningar för randvillkor:

$$\begin{aligned} &n \cdot (c\nabla u) + qu = g && \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ &hu = r && \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{aligned}$$

Vad ska man fylla i för värden på en rand som är isolerad med värmeöverföringskoefficient 5, omgivande temperatur 10 och inga yttre värmekällor?

2. Varje deluppgift är värd 3 poäng, totalt 15.

(a) Beräkna riktningsderivatan av $\sin(xyz)$ i punkten (1,1,1) i riktningen $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

(b) Beräkna ∇u då $u(x, y) = \sin(x - y)$.

(c) Beräkna $\iint_T xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ för triangeln T med hörn i (0,0), (0,2), (1,1).

(d) Beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ och C är räta linjen från (1,1) till (2,3).

(e) Skriv ned en ekvation för tangentlinjen till kurvan $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ i punkten $(-1, -1, 1)$.

3. (a) Undersök funktionen $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$ med avseende på lokala max, min och sadelpunkter. (3 p)

(b) Beskriv hur man gör detta i Matlab. (3 p)

4. Härled svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) = f & \text{i } D, \\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S. \end{cases}$$

5. Beräkna volymen av det område som ligger över konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och under sfären $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Vänd!

6. (a) Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ ut genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ utan att använda divergenssatsen. (4 p)

(b) Gör samma beräkning med divergenssatsen. (2 p)

7. Härled randvillkoret för värmeledning:

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S.$$

Förklara vad de olika koefficienterna betyder och ange deras SI-enheter.

`/stig`

MVE255 2015-04-15 (korrigerad)

1 a)
```
x = linspace(-5,5)
y = x
[X,Y] = meshgrid(x,y)
Z = 1+X.^2 + Y.^2
surf(X,Y,Z)
```

b)
```
f = @(x)(1+ x(1)^2 + x(2)^2)
x = [1;1]
Df = jacobi(f,x)
```

c)
```
f = @(x)([x(1)^2 + x(2)^2-1; x(1)*x(2)-1])
x = [1;1]
x = newton(f, x, 1e-6)
```

d) $u(0) = 3$; $a\,Du(1) + 4(u(1)-5) = 2$

e) Välj Neumann. $q = 5$, $g = 30$.

---

2 a) $\hat{u} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})/\sqrt{5}$

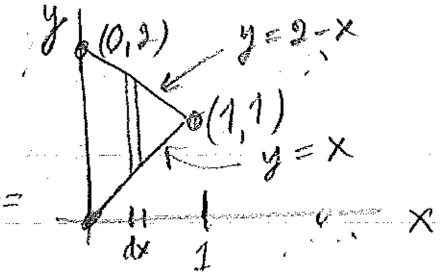
$\nabla f = yz\cos(xyz)\mathbf{i} + xz\cos(x,y,z)\mathbf{j} + xy\cos(xyz)\mathbf{k}$

$\nabla f(1,1,1) = \cos(1)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

$D_{\hat{u}} f(1,1,1) = \nabla f(1,1,1) \cdot \hat{u} = \dfrac{3\cos(1)}{\sqrt{5}}$

b) Ska vara $u = \sin(x-y)$.

$\nabla u = \cos(x-y)\mathbf{i} - \cos(x-y)\mathbf{j}$



c) $\iint_T xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} xy\,dy \right) dx =$

$= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_x^{2-x} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x(4-4x)\,dy = 2\int_0^1 (x-x^2)\,dx = \frac{1}{3}$

d) Parametrisering av linjen: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \end{cases}$, $t \in [0,1]$

eller $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} dt$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left[\underbrace{(1+2t)-(1+t)}_{=t},\ 1+t \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 (2+3t)\,dt = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

e) $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(-1) = -1\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\dot{\mathbf{r}} = 3t^2 \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $\dot{\mathbf{r}}(-1) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

Tangentlinjen: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

3/a) $f(x,y) = (x-y)(1-xy) = x - x^2y - y + xy^2$

$Df(x,y) = [1 - 2xy + y^2,\ -x^2 - 1 + 2xy]$

Stationära punkter ges av $Df(x,y)^T = 0$, dvs

$$\begin{cases} 1 - 2xy + y^2 = 0 & (1) \\ 1 - 2xy + x^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ekv (1): $1 - 2xy = -y^2$. Insatt i (2): $y^2 = x^2$

dvs $y = \pm x$.

Med $y = -x$ får vi $1 + 2x^2 + x^2 = 0$, ingen lösning.

Med $y = x$ får vi $1 - 2x^2 + x^2 = 0$, med lösningarna $x = \pm 1$.

Alltså: två stationära punkter: $(1,1), (-1,-1)$.

Hessematrisen är

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} -2y & -2x+2y \\ -2x+2y & 2x \end{bmatrix}$$

$$D^2 f(1,1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^2 f(-1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

I båda punkterna är egenvärdena ± 2. Alltså: sadelpunkter.

b)
```
>> f = @(x)(((x(1) - x(2)) * (1 - x(1)*x(2)))
>> gradf = @(x)(jacobi(f, x)')   % gradienten
>> Hf = @(x)(jacobi(gradf, x))   % Hesse
>> x = newton(gradf, [2;3], 1e-6)
>> eig(Hf(x))
```

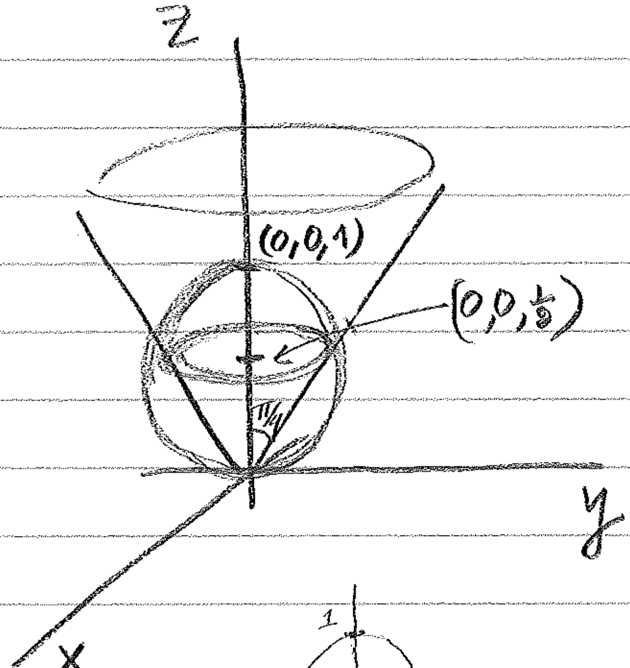
4) Se FEM2.

5) Kon: $z = \sqrt{x^2+y^2}$

Sfär: $x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

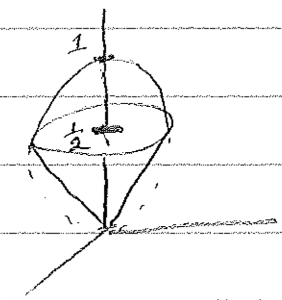
dvs $x^2+y^2+z^2 = z$

Skärningen ges av



$$\begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 = z \end{cases}$$

Vi får $z = \frac{1}{2}$.



Sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \qquad \sqrt{x^2+y^2} = r = \rho \sin\phi$$

Sfären: $\rho^2 = \rho\cos\phi$ dvs $\rho = \cos\phi$

Konen: $\rho\cos\phi = \rho\sin\phi$ dvs $\cos\phi = \sin\phi$, $\phi = \frac{\pi}{4}$.

Området blir:

$$D: \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, \ 0 \le \rho \le \cos\phi$$

Volymen: $V = \iiint_D dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\cos\phi} d\phi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} \cos^3\phi \sin\phi \, d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

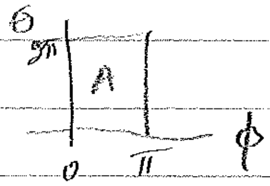
6) a) Sfären parametriseras i sfäriska koordinater:

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = a\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + a\cos\phi\,\mathbf{k}$$

$$0 \le \phi \le \pi\ ,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_\theta = \ldots = a^2\Big(\sin^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin^2\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \sin\phi\cos\phi\,\mathbf{k}\Big) \quad (\text{utåtriktad normal})$$

Flödet är



$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_A \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_\theta)\,d\phi\,d\theta$$

$$= \iint_A \Big(a\cos\phi\,\mathbf{i} + a\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + a\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{k}\Big)\cdot$$

$$\cdot\, a^2\Big(\sin^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin^2\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \sin\phi\cos\phi\Big)\,d\phi\,d\theta$$

$$= a^3\iint_A \big(2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta\big)\,d\phi\,d\theta$$

$$= a^3\, 2\int_0^{\pi}\sin^2\phi\cos\phi\,d\phi\,\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta}_{=0} +$$

$$+\ a^3\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi}_{=\frac{8}{3}}\ \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3}a^3$$

Här har vi använt:

$$\int_0^{\pi} \sin^3\phi \, d\phi = \int_0^{\pi} (1-\cos^2\phi)\sin\phi \, d\phi =$$

$$= \left[-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi \right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

---

b) $\nabla \cdot \mathbb{F} = 1$

Divergenssatsen ger

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \iiint_B \nabla \cdot \mathbb{F} \, dV = \iiint_B dV = V(B) = \frac{4\pi a^3}{3}$$

---

7. Se FEM2.

/Stig