Matematik Chalmers

Tentamen MVE255 (TMV191) Matematisk analys i flera variabler, 2015–05–30 f M

Telefon: Gustav Kettil 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1, totalt 20 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret.

Uppgift 2–6 är värda 6 poäng vardera, totalt 30. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: måndag 15 juni, 10–12, hos Stig Larsson.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng, totalt 20.

1.1. Ge ett exempel som visar hur man använder MATLAB-funktionen `surf`.

1.2. Hur beräknar man gradienten till funktionen $f(x, y, z) = xyz$ i punkten (1,1,1) med `jacobi.m`?

1.3. Hur löser man ekvationssystemet $x^2 + y^3 = 2; x^4 - 2y^3 = -1$ med programmet `newton.m`?

1.4. Fyll i värden i filen `BdryData.m`:

```
if tag==1  k=...;  uA=...;   g=...; end
if tag==2  k=...;  uA=...;   g=...; end
```

som anger randvillkoren $u(0) = 5$, $u'(1) = 0$.

1.5. PDE Toolbox har dessa beteckningar för randvillkor:

$$\begin{aligned} n \cdot (c\nabla u) + qu &= g \qquad \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu &= r \qquad \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{aligned}$$

Vad ska man fylla i för värden på en rand som är perfekt isolerad och har inga värmekällor på randen?

1.6. Beräkna $\nabla \times \nabla\phi$ med godtyckligt skalärt fält ϕ.

1.7. Beräkna den linjära approximationen till funktionen $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^3 x_3^2$ kring punkten $a = (1, 1, 1)$.

1.8. Beräkna volymen av området $R : 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$.

1.9. Beräkna $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ och C är kurvan $y = x^3$, $x \in [0, 1]$.

1.10. Skriv ned en ekvation för tangentplanet till ytan $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$ i punkten $(1, 1, 2)$.

2. Randvärdesproblemet för en stång som är fast inspänd i ena änden och utsatt för en dragkraft i den andra är:

$$\begin{cases} -\mathrm{D}\big(EA\,\mathrm{D}u\big) = 0 \quad \text{för } x \in I = (0, L), \\ u(0) = 0, \quad EA\,u'(L) = P. \end{cases}$$

Antag att tvärsnittsarean varierar enligt $A(x) = A_0(1 + \gamma x/L)$. Här är P, E, L, A_0 givna och γ en parameter. Bestäm γ så att förlängningen av stången $u(L)$ får ett föreskrivet värde ΔL, dvs $u(L) = \Delta L$. Tips: $\int \frac{1}{1+s} \mathrm{d}s = \ln(1 + s)$.

Vänd!

3. (a) Ställ upp Lagranges multiplikatormetod för att minimera funktionen $f(x, y, z) = xy+2xz+2yz$ under bivillkoret $g(x, y, z) = xyz - V = 0$. Du behöver bara skriva ned ekvationerna men inte lösa dem. (3p)

(b) Beskriv hur man gör detta i Matlab med våra program `jacobi.m` och `newton.m`. (3 p)

4. Härled svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) = f & \text{i } D, \\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S. \end{cases}$$

5. Området R är innanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$, ovanför paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och under planet $z = 4$. Området fylls av ett material med masstäthet som är proportionell mot avståndet till axeln, $\delta(x, y, z) = \delta_0\sqrt{x^2 + y^2}$. Beräkna massan.

6. (a) Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ upp genom ytan $S : z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, utan att använda divergenssatsen. (3 p)

(b) Gör samma beräkning med divergenssatsen. (3 p)

`/stig`

1

MVE255 2015-05-30

1.1
```
% Plotta grafen z = 1+x^2+y^2.
>> x = linspace(-5,5);
>> y = x;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> Z = 1+X.^2 + Y.^2;
>> surf(X,Y)
```

1.2
```
>> Df = jacobi(@(x) x(1)*x(2)*x(3), [1;1;1])
```

1.3
```
>> x = newton(@(x) [x(1)^2+x(2)^3-2; x(1)^4 -
   - 2*x(2)^3 + 1], [0;0;0], 1e-3)
```

1.4 $k = 1e8$, $uA = 5$, $g = 7$ (g används ej, godt. värde)
$k = 0$, $uA = 7$, $g = 0$ (uA används ej, godt. värde)

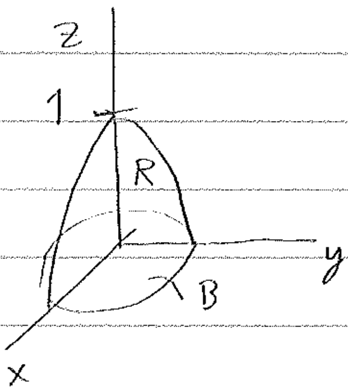
1.5 Neumann, $q = 0$, $g = 0$.

1.6
$$\nabla \times \nabla\phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)$$

$$= (0,0,0) = \mathbf{0}, \text{ ty } \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \text{ osv.}$$

1.7
$$f(x) = x_1 x_2^3 x_3^2, \quad f(1,1,1) = 1$$
$$f'(x) = [x_2^3 x_3^2, \ 3x_1 x_2^2 x_3^2, \ 2x_1 x_2^3 x_3], \quad f'(1,1,1) = [1,3,2]$$
$$L(x) = 1 + [1,3,2]\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 1 \end{bmatrix}$$

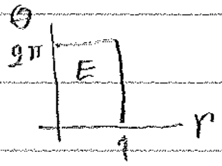
1.8 Enkelt i z, mellan två grafer $0 \le z \le 1-x^2-y^2$, $(x,y) \in B$



$$V = \iiint_R dV = \iint_B \left(\int_0^{1-x^2-y^2} 1\, dz \right) dx\, dy$$

$$= \iint_B (1-x^2-y^2)\, dx\, dy = \iint_E (1-r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r - r^3)\, dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r-r^3)\, dr =$$



$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

1.9 $C: \; y = x^3, \; x \in [0,1]$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases}, \quad t \in [0,1], \quad \mathbf{r}'(t) = (1, 3t^2)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 (-t^3, t) \cdot (1, 3t^2)\, dt$$

$$= \int_0^1 (-t^3 + 3t^3)\, dt = 2\int_0^1 t^3\, dt = \frac{1}{2}$$

1.10 $\mathbf{r} = (u, v, u^2+v^2)$

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1), \quad \mathbf{N}(1,1) = (-2,-2,1)$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N} = 0, \quad -2(x-1) - 2(y-1) + (z-2) = 0$$

Alternativ: Ytan är en graf: $z = x^2 + y^2$.

Linjärisering i $(1,1)$: $L(x,y) = 2 + [2, 2]\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix}$

Tangentplanet är grafen till $L(x,y)$:

$$z = L(x,y)$$
$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

Alternativ. ytan är en nivåyta: $z - x^2 - y^2 = 0$

$f(x,y) = z - x^2 - y^2$

Normalvektor: $N = \nabla f(1,1) = (-2, -2, 1)$

$$(x-1,\ y-1,\ z-2) \cdot (-2, -2, 1) = 0$$

---

2. $\begin{cases} -D\big(EA(x)\,Du\big) = 0, & x \in (0,L) \\ u(0) = 0, & EA(L)\,u'(L) = P \end{cases}$

Integrera: $EA(x)\,Du(x) = C_1$

Randvillkor 2 ger: $C_1 = P$.

$$Du(x) = \frac{P}{EA(x)} = \frac{P}{EA_0}\,\frac{1}{1 + \gamma\frac{x}{L}}$$

Integrera: $u(x) = \dfrac{PL}{EA_0\gamma}\ln\left(1 + \gamma\frac{x}{L}\right) + C_2$

Randvillkor 1 ger: $C_2 = 0$.

$$u(x) = \frac{PL}{EA_0\gamma} \ln\left(1+\gamma \frac{x}{L}\right)$$

Vi vill ha $u(L) = \frac{PL}{EA_0\gamma} \ln(1+\gamma) = \Delta L$

Lös ut γ: $\frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma) = \frac{EA_0 \Delta L}{PL}$

Denna ekvation är olösbar med analytisk metod.
Newtons metod behövs.

---

3. (a) Minimera $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ under bivillkoret $g(x,y,z) = xyz - V = 0$.

Lagranges multiplikatormetod: sök kritiska punkt till

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

Kritisk punkt ges av

$$DL(x,y,z,\lambda) = 0$$

dvs

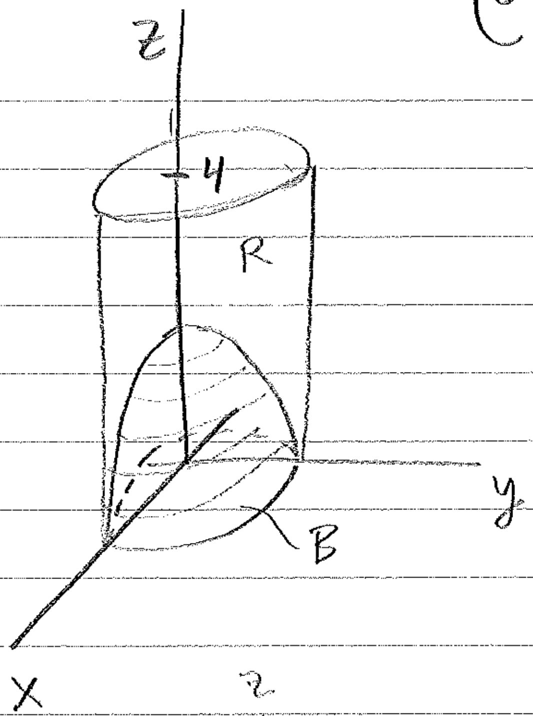
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = f'_x(x,y,z) + \lambda g'_x(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = f'_y(x,y,z) + \lambda g'_y(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = f'_z(x,y,z) + \lambda g'_y(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x,y,z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 2z + yz = 0 \\ x + 2z + xz = 0 \\ 2x + 2y + xy = 0 \\ xyz - V = 0 \end{cases}$$

(b)
```
V = 1
f = @(x) x(1)*x(2)+2*x(1)*x(3)+2*x(2)*x(3);
g = @(x) x(1)*x(2)*x(3) - V;
L = @(x) f(x(1:3)) + x(4)*g(x(1:3));
DL = @(x) jacobi(L,x)';
x0 = [1;1;1;1];
x = newton(DL, x0, 1e-6)
y = f(x)
```

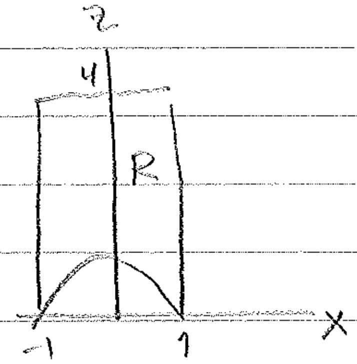
4. Se FEM2.

5. Enkelt i z, mellan två grafer:



$$1-x^2-y^2 \le z \le 4, \quad (x,y) \in B$$

$$M = \iiint_R \delta \, dV =$$



$$= \iiint_R \delta_0 \sqrt{x^2+y^2} \, dx\,dy\,dz$$

$$= \delta_0 \iint_B \left(\int_{1-x^2-y^2}^{4} \sqrt{x^2+y^2} \, dz \right) dx\,dy$$

$$= \delta_0 \iint_B \sqrt{x^2+y^2} \, [z]_{1-x^2-y^2}^{4} \, dx\,dy$$

$$= \delta_0 \iint_B \sqrt{x^2+y^2} \left(4-(1-x^2-y^2)\right) dx\,dy$$

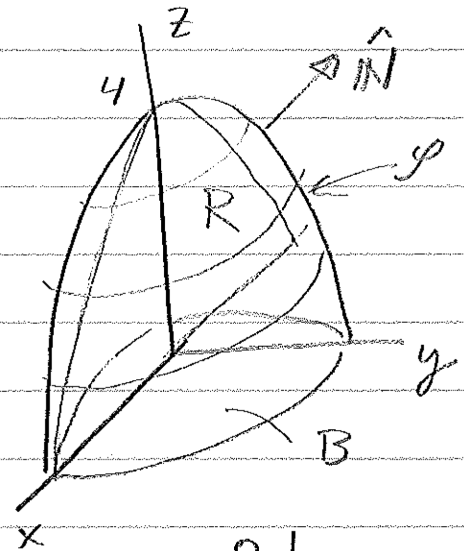
$$= \{\text{polära}\} = \delta_0 \iint_E r(3+r^2)\, r \, dr\, d\theta$$

$$= \delta_0 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (3r^2+r^4)\, dr \right) d\theta$$

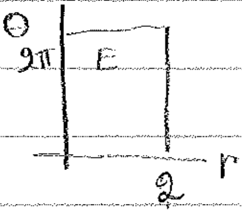
$$= \delta_0 \cdot 2\pi \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{5} \pi \delta_0 .$$

6. (a) $\mathbb{F}(x,y,z) = (x^2, xy, z)$

$\mathcal{S}$ är en graf.



$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 4 - u^2 - v^2, \end{cases} \qquad (u,v) \in B$$



$$\mathbb{N} = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = \pm(2u, 2v, 1)$$

Välj plus för uppåt-riktning.

Flödet är

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_{B} (u^2, uv, 4-u^2-v^2) \bullet (2u, 2v, 1)\, du\, dv$$

$$= \iint_{B} \left(2u^3 + 2uv^2 + 4 - u^2 - v^2\right) du\, dv$$

$$= \iint_{E} \left(2(r\cos\theta)^3 + 2r\cos\theta(r\sin\theta)^2 + 4 - r^2\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= \iint_{E} \Big(2\cos\theta\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} r^4 + (4r - r^3)\Big)\, dr\, d\theta$$

$$= 2\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \int_0^2 r^4\, dr}_{=0} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(-\tfrac{1}{2}\right)(4-r^2)(-2r)\, dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2} \frac{(4-r^2)^2}{2} \right]_0^2 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$$

(b) Gauss sats: $\iint_{\mathcal{S}} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS + \iint_{B} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS =$

$$= \iiint_R \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV$$

På B: $\hat{\mathbb{N}} = -\mathbb{k}$; $z = 0$ och

$$\mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} = \mathbb{F}(x,y,0) \cdot \hat{\mathbb{N}} = (x^2, xy, 0) \cdot (0,0,-1)$$

$= 0$, så att $\iint_B \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = 0$.

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbb{F} = 2x + x + 1 = 3x + 1$$

$$\iiint_R \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \iiint_R (3x+1)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_B \left(\int_0^{4-x^2-y^2} (3x+1)\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_B (3x+1)(4-x^2-y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_E \left(3\, r\cos\theta + 1\right)(4 - r^2)\, r^2\, dr\, d\theta$$

$$= \underbrace{3\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta}_{=0} \int_0^2 r^2(4-r^2)\,dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4-r^2)\, r\, dr$$

$= \{$ samma integral som i(a) $\} =$

$= 8\pi$.

Flödet genom S:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_R \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV - \underbrace{\iint_B \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS}_{=0}$$

$$= 8\pi .$$

/stig