Matematik Chalmers

Tentamen MVE255 (TMV191) Matematisk analys i flera variabler, 2016–04–05 f H

Telefon: Johannes Borgqvist 772 5325
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1, totalt 20 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret.

Uppgift 2–6 är värda 6 poäng vardera, totalt 30. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: torsdag 28 april, 11.30–12.30, hos Stig Larsson.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng, totalt 20.

1.1. Ge ett exempel som visar hur man använder MATLAB-funktionen `newton.m` från datorövningarna.

1.2. Beskriv vad följande Matlab-kommandon gör. Skissa figuren som skapas.

```
>> x=linspace(0,1); y=x;
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=X.^2+Y.^2;
>> surf(X,Y,Z)
```

1.3. Vad blir `A` efter följande Matlab-kommandon med `jacobi.m` från datorövningarna?

```
>> x=[1;2]; A=jacobi(@(x)x(1)*x(2),x);
```

1.4. Fyll i värden i filen `BdryData.m`:

```
if tag==1  k=...;  uA=...;   g=...; end
if tag==2  k=...;  uA=...;   g=...; end
```

som anger randvillkoren $u(0) = 5$, $a(1)u'(1) + 7(u(1) - 3) = 5$.

1.5. PDE Toolbox har dessa beteckningar för randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem":

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n \cdot (c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vad ska man fylla i för värden för ett värmeledningsproblem med inga värmekällor, värmeledningskoefficient = 5, temperaturen = 7 på en del av randen och resten av randen perfekt isolerad?

1.6. Visa att $\nabla \cdot (a\mathbf{F}) = \nabla a \cdot \mathbf{F} + a\nabla \cdot \mathbf{F}$.

1.7. Beräkna Taylors polynom av grad 2 till funktionen $f(x) = x_1x_2x_3$ kring punkten $a = (1, 1)$.

1.8. Beräkna $\nabla \cdot \nabla u$ med funktionen $u(x, y) = e^x \cos(y)$.

1.9. Beräkna arbetet som utförs av kraften $\mathbf{F} = -y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ längs kurvan $C\colon \mathbf{r} = \cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $t \in [0, \pi/2]$.

1.10. Skriv ned en ekvation för tangentplanet till ytan $z = x^2 + y^2$ i punkten $(2, 1, 5)$.

Vänd!

2. Beräkna massan av kroppen som begränsas av ytorna $y = x^2$, $z = 0$ och $y + z = 1$ och som har konstant densitet ρ.

3. (a) En öppen (dvs utan lock) rektangulär låda ska tillverkas av en rektangulär pappskiva med area A. Lådans dimensioner ska bestämmas så att volymen V blir maximal. Ställ upp Lagranges multiplikatormetod för detta problem. Du behöver bara skriva ned ekvationerna men inte lösa dem. (3p)

(b) Beskriv hur man gör detta i Matlab med våra program `jacobi.m` och `newton.m`. (3 p)

4. Härled ytelementet för en graf $z = f(x, y)$.

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$ ut genom ytan av kroppen som begränsas av ytorna $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ och $z = 3$.

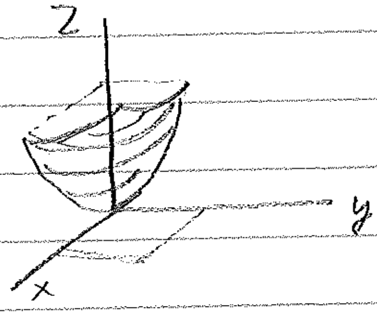
6. Formulera Gauss divergenssats i rummet. `/stig`

MVE255 2016-04-05

1.1 Vi vill lösa systemet $\begin{cases} xy = 1 \\ x+y = 1 \end{cases}$

```
>> x = newton(@(x) [x(1)*x(2)-1; x(1)+y(1)-1], x=[0;0], 1e-6)
```

1.2 Vi plottar grafen $z = x^2+y^2$ över kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.



1.3 $A = [2;1]$

1.4 if tag==1; k=1e8; uA=5; g=0;
if tag==2; k=7; uA=3; g=5;

1.5 $c=5$, $a=0$, $f=0$
$q=0$, $g=0$ på S_2, $h=1$, $r=7$ på S_1

1.6 $$\nabla\cdot(a\mathbb{F}) = \nabla\cdot(aF_1\mathbf{i} + aF_2\mathbf{j} + aF_3\mathbf{k}) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(aF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(aF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(aF_3)$$
$$= \frac{\partial a}{\partial x}F_1 + a\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}F_2 + a\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}F_3 + a\frac{\partial F_3}{\partial z}$$
$$= \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z}\right)\cdot(F_1, F_2, F_3) + a\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$$
$$= \nabla a\cdot\mathbb{F} + a\nabla\cdot\mathbb{F}$$

1.7 $f(x) = x_1x_2x_3$, $\quad f(1,1,1) = 1$

$f'(x) = [x_2x_3,\ x_1x_3,\ x_1x_2]$, $\quad f'(1,1,1) = [1,1,1]$

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(1,1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(x) = 1 + [1,1,1]\begin{bmatrix} x_1-1 \\ x_2-1 \\ x_3-1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x_1-1, x_2-1, x_3-1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-1 \\ x_2-1 \\ x_3-1 \end{bmatrix}$$

1.8 $$\nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-e^x \sin y\right) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

1.9
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \left(-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}\right)\cdot\left(-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 t + \cos^2 t + t\right)dt = \int_0^{\pi/2}(1+t)\,dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8}$$

1.10 $z = f(x,y)$, $\quad f(x,y) = x^2+y^2$, $\quad f'_x(x,y) = 2x$, $\quad f'_y(x,y) = 2y$

$f(2,1) = 5$, $\quad f'_x(2,1) = 4$, $\quad f'_y(2,1) = 2$

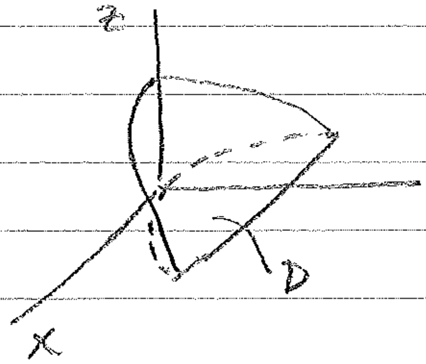
$$z = 5 + [4, 1]\begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

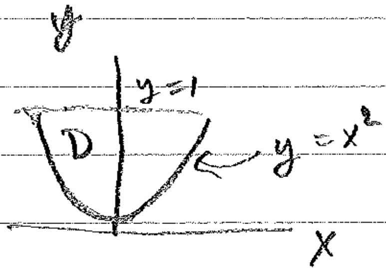
$$\boxed{z = 5 + 4(x-2) + (y-1)}$$

(3

2. $m = \iiint\limits_K \rho \, dV = \rho \iiint\limits_K dV = \rho \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{0}^{1-y} dz \, dy \, dx = \dots =$

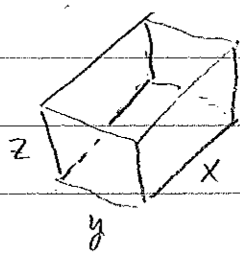
$= \rho \frac{8}{15}$





3. $V = xyz$

$A = xy + 2xz + 2yz = 10$



Sök kritisk punkt till Lagrangefunktionen:

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 10)$$

Kritiska punkter ges av

$$DL(x,y,z,\lambda) = 0$$

dvs $\frac{\partial L}{\partial x} = yz + \lambda y + \lambda \cdot 2z = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = xz + \lambda x + \lambda \cdot 2z = 0$

$\frac{\partial L}{\partial z} = xy + \lambda \cdot 2x + \lambda \cdot 2y = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy + 2xz + 2yz - 10 = 0$

4

3.b)
```
f = @(x) ( x(1)*x(2)*x(3) );
g = @(x) ( x(1)*x(2) + 2*x(1)*x(3) + 2*x(2)*x(3) - 10 );
L = @(x) ( f(x(1:3)) + x(4)*g(x(1:3)) );
DL = @(x) jacobi(L,x)';
X0 = [1;1;1;1]
x = newton(DL, X0, 1e-6);
```

4) Se boken Exempel 4 sid 891.

5) $\nabla \cdot \mathbb{F} = y^2 + z^2 + x^2$

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \iiint_K (x^2+y^2+z^2)\, dV =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{cylinder-} \\ \text{koord.} \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + z^2)\, r \, dz\, dr\, d\theta = 60\pi$$

6) Se boken.