Matematik Chalmers

Tentamen MVE255 Matematisk analys i flera variabler, 2017–05–30 e SB

Telefon: Stig Larsson 772 3543
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1, totalt 10 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret. Uppgift 2–5 är värda 5 poäng vardera, totalt 20, bedöms på om lösningarna är korrekta. Uppgift 6–7 är värda 10 poäng vardera. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

Granskning: 22 juni och 23 augusti 13.00–14.00 eller efter överenskommelse hos Stig Larsson.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng, totalt 10.

1.1. Bestäm arbetet som uträttas av kraftfältet $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ på en partikel som rör sig längs kurvan $C\colon \mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln(t)\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$.

1.2. Bestäm tangentlinjen till kurvan $C\colon \mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln(t)\mathbf{k}$ i punkten $(3, 1, 0)$. Tangentlinjen ska anges på parameterform.

1.3. Beskriv hur man plottar kurvan $C\colon \mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln(t)\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$, i Matlab.

1.4. Vad blir variabeln `A` efter kommandona

```
>> x=[1;2;3]; f=@(x)(x(1)*x(2)*x(3)); Df=@(x)jacobi(f,x)'; A=jacobi(Df,x);
```

med Matlab-programmet `jacobi.m` från datorövningarna.

1.5. PDE Toolbox har randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem":

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n\cdot(c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vad ska man fylla i för värden på c, a, f, q, g, h, r för ett värmeledningsproblem med inre värmekälla $= 7$ `J/(m^3 s)`, värmeledningskoefficient $= 13$ `[J/(m s K)]` i kvadraten $D = [0, L] \times [0, L]$. Randen $x = 0$ är isolerad med koefficient 11 `J/(m^2 s K)` och resten av randen har ingen isolering alls. Inga värmekällor på randen, yttre temperatur $= 6$ `K`. Vilka delar av randen är S_1 respektive S_2?

---

2. (5 poäng) Beräkna integralen

$$\iint_R e^{x/y}\,dA,$$

där R är området som begränsas av positiva y-axeln, linjen $y = 1$ och kurvan $y = \sqrt{x}$.

3. (5 poäng) Formulera Gauss divergenssats i rummet.

4. (5 poäng) Härled ytelementet för en graf $z = f(x, y)$.

5. (5 poäng) Vi vill minimera funktionen $f(x, y, z) = x^2y^4 + z^2$ över sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(a) Formulera Lagranges multiplikatormetod för detta problem.

(b) Skriv ned hur man gör detta i Matlab med våra program `jacobi.m` och `newton.m`.

Vänd!

6. (10 poäng) Vid värmeledning i kuben $D = [0, L] \times [0, L] \times [0, L]$ har vi värmeledningskoefficienten a och temperaturen är $u(x, y, z) = u_0 \sin(\pi x/L) \sin(\pi y/L) \sin(\pi z/L)$.

(a) Vad är då värmekälltätheten f inuti D? Svara med enhet.

(b) Beräkna värmeflödet i utåtriktningen genom randen $x = 0$. Svara med enhet. Flödar värme ut eller in? Resonera: är resultatet rimligt?

Använd värdena $a = 13$ `J/(m s K)`, $u_0 = 500$ `K` och $L = 2$ `m`.

7. (10 poäng) (a) Skriv ned finita elementbasfunktionerna ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 för ett nät som består av en enda triangel T med hörnen (noderna) $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$. (3 p)

(b) Matrisen A med elementen $a_{ij} = \iint_T \nabla\phi_i(x, y) \cdot \nabla\phi_j(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kallas *styvhetsmatrisen.* Beräkna ett av elementen, till exempel a_{11}. (3 p)

(c) Matrisen M med elementen $m_{ij} = \iint_T \phi_i(x, y)\phi_j(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kallas *massmatrisen.* Beräkna ett av elementen, till exempel m_{11}. (4 p)

Tips: basfunktionerna är av formen $\phi(x, y) = a + bx + cy$ och lika med 1 en av noderna och 0 i de övriga, till exempel $\phi_1(0, 0) = 1$, $\phi_1(0, 1) = 0$, $\phi_1(1, 0) = 0$.

`/stig`

MVE255 2017-05-30 (med rättelser)

1.1 $C: \mathbf{r} = (3t, t^2, \ln(t)),\ t \in [0,1].\quad \mathbf{F} = (xy, x^2, y^2)$

$\dot{\mathbf{r}} = (3, 2t, \frac{1}{t})$

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^3, 9t^2, t^4) \cdot (3, 2t, \tfrac{1}{t})\,dt =$$

$$= \int_0^1 (9t^3 + 18t^3 + t^3)\,dt = 28\int_0^1 t^3 dt = 7$$

1.2 $C: \mathbf{r}(t) = (3t, t^2, \ln(t)),\quad t_0 = 1,\quad \mathbf{r}(t_0) = (3, 1, 0)$

$\dot{\mathbf{r}}(t) = (3, 2t, 1/t),\quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = (3, 2, 1)$

Tangentens ekv: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)(t - t_0)$

$\mathbf{r}(t) = (3,1,0) + (3,2,1)(t-1)$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t - 1 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

Även: $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t_0) + s\,\mathbf{r}'(t_0)$

$$\begin{cases} x = 3 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = s \end{cases}$$ (annan parameter $s = t - 1$)

1.3

```
>> t = linspace(0,1); x = 3*t; y = t.^2; z = log(t);
>> plot3(x,y,z)
```

1.4 Det blir Hessematrisen $D^2 f(1,2,3) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

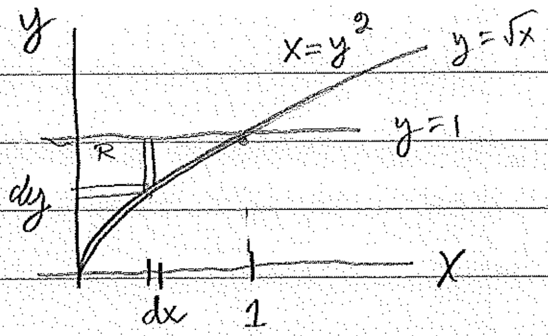
(se Datorövning 3)

1.5 $c = 13,\ a = 0,\ f = 7,$

På randen $x = 0$ (S_2 Neumann): $q = 11$, $g = 11 \cdot 6 = 66$

På resten av randen (S_1 Dirichlet): $h = 1$, $r = 6$

2.



$$\iint_R e^{x/y}\,dA = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\; ? \;\right]_{\sqrt{x}}^1 \, dx$$

Nytt försök: $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{x/y}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[y e^{x/y} \right]_{x=0}^{y^2} dy$

$$= \int_0^1 y(e^y - 1)\,dy = \left\{ \begin{matrix} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{matrix} \right\} = \left[y(e^y - y) \right]_0^1 - \int_0^1 (e^y - y)\,dy$$

$$= (e-1) - \left(e - 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

3. Om $\mathbb{F}$ är ett slätt vektorfält i ett område D med slät rand som är en orienterad yta S med utåtriktat enhetsnormalvektorfält $\hat{\mathbb{N}}$, så gäller formeln

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS$$

4. Graf: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$

Parametrisering: $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in D$

Tangenter: $\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 0, f_1'(u,v)) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, f_2'(u,v)) \end{cases}$

Normalvektor: $\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_1' \\ 0 & 1 & f_2' \end{vmatrix} =$

$= (-f_1'(u,v), -f_2'(u,v), 1)$

Ytelementet: $dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\,dv =$

$= \sqrt{f_1'(u,v)^2 + f_2'(u,v)^2 + 1}\; du\,dv =$

$= \sqrt{f_1'(x,y)^2 + f_2'(x,y)^2 + 1}\; dx\,dy$

---

5. Minimera $f(x,y,z) = x^2y^4 + z^2$ över sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(a) Bivillkor $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

Lagrangefunktion:

$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$

$= x^2y^4 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

Kritiska punkter ges av:

$$L'(x,y,z,\lambda) = 0$$

dvs

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z,\lambda) = 2xy^4 + \lambda\cdot 2x = 0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda) = 4x^2y^3 + \lambda\cdot 2y = 0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda) = 2z + \lambda\cdot 2z = 0 \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2-4 = 0 \end{cases}$$

(b)
```
>> f = @(x)( x(1)^2*x(2)^4 + x(3)^2 )
>> g = @(x)( x(1)^2 + x(2)^2 + x(3)^2 - 4 )
>> L = @(x)( f(x(1:3)) + x(4)*g(x(1:3)) )
>> x = [1;1;1;1];   DL = @(x) jacobi(L,x)';
>> x = newton(DL, x, 1e-6)
>> y = f(x(1:3))
```

6. $u(x,y,z) = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$

(a) Värmeflödestätheten:

$$\mathbb{F} = -a\nabla u = -a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= -a\frac{\pi}{L}u_0\Big(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\frac{\pi y}{L}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\Big)$$

Värmekällstätheten:

$$f = \nabla\cdot\mathbb{F} = \nabla(-a\nabla u) = -a\,\nabla\cdot\nabla u =$$

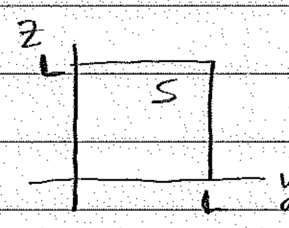
$$= -a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) =$$

$$= 3a\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$a = 13$ J/(msK), $u_0 = 500$ K, $L = 2$ m

$$f = \frac{3\cdot 13\cdot 500\,\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$$

J/(m^{3}s)



(b) På randen $x=0$: $\hat{\mathbb{N}} = -\mathbf{i}$,

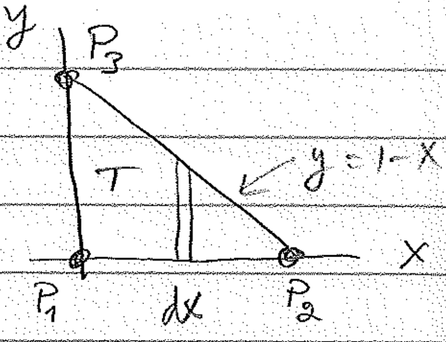
$$\hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F} = -F_1(0,y,z) = a\frac{\pi}{L}u_0\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

Flödet ut: $\iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,dS =$

$$= a\frac{\pi}{L}u_0\int_0^L \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)dy\int_0^L \sin\frac{\pi z}{L}\,dz =$$

$$= a\frac{\pi}{L}u_0\left(\frac{L}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi y}{L}\right]_0^L\right)^2 = a\frac{L}{\pi}u_0\cdot 4 = \frac{52000}{\pi}\text{ J/s.}$$

7. (a)



$$\phi_1(x,y) = 1 - x - y$$
$$\phi_2(x,y) = x$$
$$\phi_3(x,y) = y$$

(b) $\nabla\phi_1 = (-1, -1)$

$\nabla\phi_2 = (1, 0)$

$\nabla\phi_3 = (0, 1)$

$$a_{11} = \iint_T |\nabla\phi_1|^2\,dx\,dy = 2\iint_T dx\,dy = 1$$

$$a_{22} = \iint_T |\nabla\phi_2|^2\,dx\,dy = \iint_T dx\,dy = \tfrac{1}{2} = a_{33}$$

$$a_{12} = \iint_T \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2\,dx\,dy = -1\iint_T dx\,dy = -\tfrac{1}{2} = a_{13} =$$

$$= a_{21} = a_{31}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (En av dessa räcker.)

(c) $$m_{11} = \iint_T \phi_1(x,y)^2\,dx\,dy = \iint_T (1-x-y)^2\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(1-x-y)^3}{-3} \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^3\,dx = \frac{1}{12}$$

$$M = \text{''} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ (En av dessa räcker.)

/Stig