Matematik Chalmers

**Tentamen MVE255 Matematisk analys i flera variabler, 2017–08–25 f SB**

Telefon: Claes Andersson, 772 5325
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1, totalt 10 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret. Uppgift 2–5 är värda 5 poäng vardera, totalt 20, bedöms på om lösningarna är korrekta. Uppgift 6–7 är värda 10 poäng vardera. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

Granskning: efter överenskommelse hos Stig Larsson.

---

**1.** Varje deluppgift är värd 2 poäng, totalt 10.

**1.1.** Bestäm en potential till vektorfältet $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$.

**1.2.** Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = x^2 + y^2$ i punkten $(1, 2, 5)$.

**1.3.** Beskriv hur man plottar ytan $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ i Matlab.

**1.4.** Vad blir variabeln `x` efter kommandona

```
>> x0=[1;2]; f=@(x)( (x(1)-1)^2+(x(2)-2)^2 ); Df=@(x)jacobi(f,x)'; x=newton(Df,x0,1e-6);
```

med Matlab-programmen `jacobi.m` och `newton.m` från datorövningarna.

**1.5.** PDE Toolbox har randvärdesproblem av typen “Generic scalar problem”:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n \cdot (c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vad ska man fylla i för värden på $c, a, f, q, g, h, r$ för ett värmeledningsproblem med ingen inre värmekälla, värmeledningskoefficient $= 9$ `[J/(m s K)]` i kvadraten $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Hela randen är isolerad med koefficient 11 `J/(m^2 s K)` . På hela randen finns en yttre uppvärmning med flödestätheten 10 `J/(m^2 s)` och omgivningens temperatur är 6 `K`.

**Vänd!**

**2.** (5 poäng) Beräkna volymen av området som ligger innanför klotet $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**3.** (5 poäng) Härled Newtons metod med hjälp av linjärisering.

**4.** (5 poäng) Härled följande partialintegrationsformel i tre variabler:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \, \mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \, \mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}V$$

**5.** (5 poäng) Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{cases} x_1^5 + x_2^4 + x_3^4 - 1 = 0 \\ x_2 x_3^2 - x_3 = 0 \\ x_3^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

med startpunkt $(1, 1, 1)$.

**6.** (10 poäng) Vid värmeledning i kuben $D = [0, L] \times [0, L] \times [0, L]$ har vi värmeledningskoefficienten $a$ och temperaturen är $u(x, y, z) = u_0(x - L)^2(y - L)^2(z - L)^2/L^6$.

(a) Vad är då värmekälltätheten $f$ inuti $D$? Svara med enhet.

(b) Vad blir värmeflödestätheten i utåtriktningen genom randen $x = 0$? Svara med enhet. Flödar värme ut eller in? Resonera: är resultatet rimligt?

Använd värdena $a = 13$ `J/(m s K)`, $u_0 = 500$ `K` och $L = 2$ `m`.

**7.** (10 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ut ur området som begränsas av ytan $z = x^2 + y^2$ och ligger under planet $z = 4$.

`/stig`

MVE255 2017-08-25

1.1 $\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = z^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 6y \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2xz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi(x,y,z) = xz^2 + f(y,z) \\ \phi(x,y,z) = 3y^2 + g(x,z) \\ \phi(x,y,z) = xz^2 + h(x,y) \end{cases}$

Välj $f(y,z) = h(x,y) = 3y^2 + C$, $g(x,z) = xz^2 + C$

Välj $C = 0$. Svar: $\phi(x,y,z) = xz^2 + 3y^2$

1.2 $z = x^2 + y^2$, $P = (1,2,5)$

alt. 1: Linjärisering kring P:

$$z = 5 + [2\cdot 1, 2\cdot 2]\begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} = 5 + 2(x-1) + 4(y-2)$$

alt. 2: nivåyta $x^2 + y^2 - z = 0$

En normalvektor i P: $N_1 = (2\cdot 1, 2\cdot 2, -1) = (2,4,-1)$

Planets ekv.: $2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$

alt. 3: parameterform: $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$

Tangenter i P: $\frac{\partial r}{\partial u} = (1, 0, 2\cdot 1)$

$\frac{\partial r}{\partial v} = (0, 1, 2\cdot 2)$

$$N_2 = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (-2, -4, 1)$$

Svar: $2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$

1.3 >> x = linspace(-1, 1);
>> [X, Y] = meshgrid(x, x);
>> Z = X.^2 + Y.^2;
>> surf(X, Y, Z)

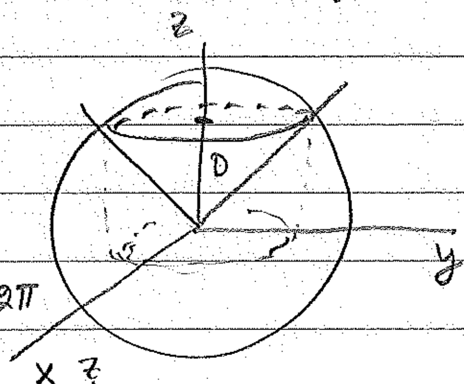
1.4 Beräknar kritisk punkt till
$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$
Alltså blir $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

1.5 $c = 9, \quad a = 0, \quad f = 0$ i $D$
$q = 11, \quad g = 11 \cdot 6 + 10$ på $S_2$
Ingen Dirichlet-rand $S_1$ så $h, r$ behövs ej.

---

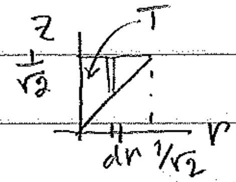
2. $D: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

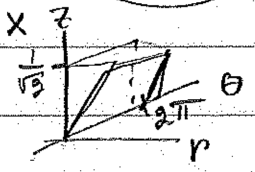
Skärning: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$




Cylinderkoordinater

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad B: \; r \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$




$$V = \iiint_D dV = \iiint_B r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi} \left( \iint_T r\,dr\,dz \right) d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left( \int_r^{1/\sqrt{2}} r\,dz \right) dr = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} r\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - r\right) dr = 2\pi \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$= \frac{\pi}{3(\sqrt{2})^3}.$$

---

3. Se "Jacobi och Newton".
4. Se "FEM2".

---

5. $f(x) = \begin{bmatrix} x_1^5 + x_2^4 + x_3^4 - 1 \\ x_2 x_3^2 - x_3 \\ x_3^4 - 1 \end{bmatrix}$, $\quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 5x_1^4 & 4x_2^3 & 4x_3^3 \\ 0 & x_3^2 & 2x_2x_3 - 1 \\ 0 & 0 & 4x_3^3 \end{bmatrix}$$

$$b = -f(1,1,1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = Df(1,1,1) = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Ah = b, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4

6. $u(x,y,z) = u_0 (x-L)^2 (y-L)^2 (z-L)^2 / L^6$

Vi beräknar derivatorna:

$$\nabla u = \frac{u_0}{L^6} \cdot 2 \Big( (x-L)(y-L)^2(z-L)^2 \mathbf{i} + $$
$$+ (x-L)^2(y-L)(z-L)^2 \mathbf{j} + (x-L)^2(y-L)^2(z-L)\mathbf{k} \Big)$$

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$= 2 \frac{u_0}{L^6} \Big( (y-L)^2(z-L)^2 + (x-L)^2(z-L)^2 +$$
$$+ (x-L)^2(y-L)^2 \Big)$$

a) Värmekällstätheten är

$$f = -\nabla \cdot (a \nabla u) = -a \nabla \cdot \nabla u = -a \Delta u =$$
$$= -2a \frac{u_0}{L^6} \Big( (y-L)^2(z-L)^2 + (x-L)^2(z-L)^2$$
$$+ (x-L)^2(y-L)^2 \Big) \left[ \frac{J}{m^3 s} \right]$$

b) Värmeflödestätheten utåt vid $x=0$ är

$$\mathbf{F}(0,y,z) \cdot (-\mathbf{i}) = -a \nabla u(0,y,z) \cdot (-\mathbf{i}) =$$

$$= a \frac{\partial u}{\partial x}(0,y,z) = \frac{2 a u_0}{L^6} (-L)(y-L)^2(z-L)^2 =$$

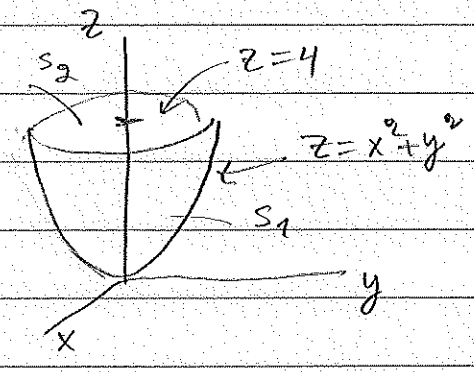
$$= -2\frac{a u_0}{L^5}(y-L)^2(z-L)^2 \quad \left[\frac{J}{m^2 s}\right]$$

Vi ser att denna är $\leq 0$. Alltså flödar värme in. Samma sak vid $y=0$ och $z=0$, medan flödet genom $x=L$, $y=L$ och $z=L$ är $0$.

Detta är rimligt eftersom värmekälltätheten $f$ är $\leq 0$ (kylning).

---

7. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$




Buktiga ytan parametriseras:

$$S_1: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2+v^2 \end{cases} \qquad (u,v) \in D = \{u^2+v^2 \leq 4\}$$

Tangenter: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 0, 2u)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, 2v)$

En normalvektor: $\mathbf{N} = \pm\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) =$

$$= \pm(-2u, -2v, 1) = (2u, 2v, -1)$$

där vi valde minustecken så att den blir utåtriktad.

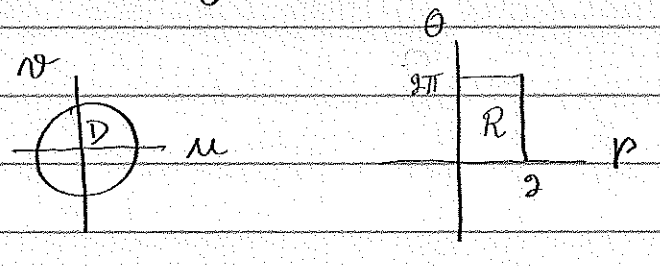
Flödet ut genom $S_1$ blir

$$\iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = \iint_D \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,du\,dv =$$

$$= \iint_D (u, v, 0)\cdot(2u, 2v, -1)\,du\,dv$$

$$= \iint_D 2(u^2+v^2)\,du\,dv = 2\iint_R r^2\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^3\,dr = 2\cdot 2\pi\cdot\frac{2^4}{4} = 16\pi$$




På topp-ytan $S_2$ har vi $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{K}$

och $\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}} = (x, y, 0)\cdot(0, 0, 1) = 0$

så att $\iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = 0.$

Totala utflödet blir $16\pi$.

/Stig