Matematik Chalmers

Tentamen MVE255 Matematisk analys i flera variabler, 2017–10–06 f SB

Telefon: Fanny Berglund, 772 5325
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1, totalt 10 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret. Uppgift 2–5 är värda 5 poäng vardera, totalt 20, bedöms på om lösningarna är korrekta. Uppgift 6–7 är värda 10 poäng vardera. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

Granskning: efter överenskommelse hos Stig Larsson.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng, totalt 10.

1.1. Ge ett exempel som visar hur man använder Matlabfunktionen `surf`.

1.2. Beskriv hur man löser ekvationssystemet $x^2 + y^3 = 2; x^4 - 2y^3 = -1$ med programmet `newton.m` från datorövningarna. Du behöver inte skriva ned själva programmet `newton.m` utan de kommandorader och eventuella andra m-filer som behövs.

1.3. Ge ett exempel som visar hur man använder Matlabfunktionen `jacobi.m` från datorövningarna.

1.4. Beräkna riktningsderivatan av funktionen $f(x,y,z) = x^2y - 3z$ i punkten $(-1,1,2)$ i riktningen $\mathbf{v} = (1,-2,2)$. I vilken riktning växer f snabbast i denna punkt och hur stor är riktningsderivatan då?

1.5. PDE Toolbox har randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem":

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n\cdot(c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vad ska man fylla i för värden på c, a, f, q, g, h, r för ett värmeledningsproblem med ingen inre värmekälla, värmeledningskoefficient = 13 `[J/(m s K)]` i kvadraten $D = [0,1] \times [0,1]$. Hela randen är isolerad med koefficient 11 `J/(m^2 s K)` . På hela randen finns en yttre uppvärmning med flödestätheten 12 `J/(m^2 s)` och omgivningens temperatur är 7 `K`.

Vänd!

2. (5 poäng) Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, 0, \frac{1}{4})$ till ytan $x = u+v$, $y = u^2-v^2$, $z = uv$.

3. (5 poäng) Beräkna volymen av det område som begränsas av xy-planet och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$.

4. (5 poäng) Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) = f \quad \text{i } D, \\ u = 0 \quad \text{på } S. \end{cases}$$

5. (5 poäng) Undersök funktionen $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

6. (10 poäng) Betrakta värmeledningsproblemet i en platta:

$$\begin{cases} -D(a(x)Du(x)) = f \quad \text{för } x \in (L, 2L), \\ u(L) = 0, \quad Du(2L) = 0. \end{cases}$$

Här är värmeledningskoefficienten $a(x) = a_0 x/L$ där a_0 `[J/(m s K)]` är konstant och värmekälltätheten f `J/(m^3s)` är konstant. (a) Beräkna temperaturen $u(x)$. (b) Bestäm värmeflödestätheten vid ränderna $x = L$ och $x = 2L$. Resonera om hur värme flödar i plattan och genom ränderna.

7. (10 poäng) (a) Beräkna flödet $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ av vektorfältet $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ ut ur området D: $x^2+y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$ utan att använda divergenssatsen.

(b) Beräkna flödet med hjälp av divergenssatsen.

/stig

MVE255 2017-10-06 /stig

1.1 Plotta ytan $z = x^2 + y^2$, $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$

```
>> x = linspace(0,1);
>> y = x;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> Z = X.^2 + Y.^2;
>> surf(X,Y,Z)
```

1.2
```
>> f = @(x)([x(1)^2 + x(2)^3; x(1)^4 - 2*x(2)^3 - 1])
>> x0 = [1;1]; tol = 1e-6
>> x = newton(f, x0, tol)
```

1.3 Derivera $f(x,y) = x^2 + y^2$ i punkten $(1,1)$.

```
>> f = @(x)(x(1)^2 + x(2)^2)
>> x = [1; 1]
>> Df = jacobi(f, x)
```

Borde ge $Df = [2, 2]$.

1.4 $f(x,y,z) = x^2 y - 3z$

$\nabla f(x,y,z) = 2xy\,\mathbf{i} + x^2 y\,\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

$\nabla f(-1,1,2) = -2\mathbf{i} + \mathbf{i} - 3$

$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $|\mathbf{v}| = 3$, $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$D_{\mathbf{v}} f(-1,1,2) = \nabla f(-1,1,2) \cdot \hat{\mathbf{v}} = \frac{-10}{3}$

Växer snabbast om $\mathbf{v} = \nabla f(-1,1,2)$. Då $D_{\mathbf{v}} f = \nabla f \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = |\nabla f| = \sqrt{14}$

1.5 $c = 13$, $a = 0$, $f = 0$ i D. $q = 11$, $g = 12 + 11 \cdot 7$ på S_2. Inget S_1.

2. $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$ Tangenter: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 2u, v)$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, -2v, u)$

Punkten $(1, 0, \frac{1}{4})$ fås av $\begin{cases} 1 = u + v \\ 0 = u^2 - v^2 \\ \frac{1}{4} = uv \end{cases}$ dvs $u = v = \frac{1}{2}$.

Tangenter i denna punkt: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 1, \frac{1}{2})$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, -1, \frac{1}{2})$

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (1, 0, -2)$$

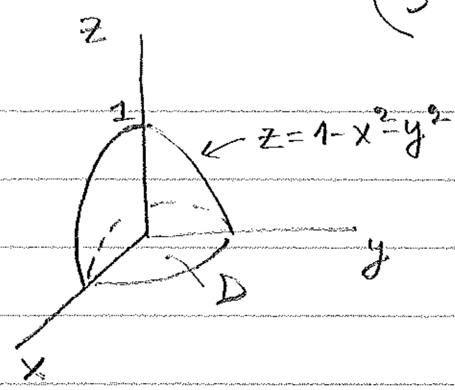
Planets ekvation: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N} = 0$

$$1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0) - 2 \cdot (z - \tfrac{1}{4}) = 0$$

$$x - 1 - 2z + \tfrac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{x - 2z - \tfrac{1}{2} = 0}$$

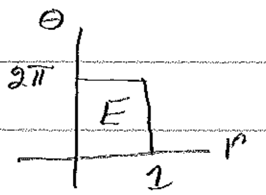
3. $D = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \}$



$$V = \iint_D z \, dx dy = \{ \text{polära koord.} \}$$

$$= \iint_E (1 - r^2) \, r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1-r) r dr \right) d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$



---

4. Se FEM2.

---

5. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Inga singulära punkter, inga randpunkter.

Kritiska punkter ges av

$$f'(x,y)^T = \begin{bmatrix} 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ 6xy - 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kritiska punkterna är $(1,2), (2,1), (-1,2), (-2,-1)$.

Hessematrisen är $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}$.

Vi beräknar egenvärdena till $f''(x,y)$ i de fyra punkterna. Vi får:

$(1,2)$ sadelpunkt, $(2,1)$ minimipunkt,

$(-1,-2)$ sadelpunkt, $(-2,-1)$ maximipunkt.

6. $-D\left(a_0 \frac{x}{L} Du(x)\right) = f \quad \left[\frac{J}{m^3 s}\right]$

$$D\left(x\,Du(x)\right) = -\frac{Lf}{a_0}$$

$$x\,Du(x) = -\frac{Lf}{a_0}x + C \qquad (*)$$

$$Du(x) = -\frac{Lf}{a_0} + \frac{C}{x}$$

$$u(x) = -\frac{Lf}{a_0}x + C\ln(x) + D$$

Randvillkor:

$$\begin{cases} 0 = u(L) = -\frac{L^2 f}{a_0} + C\ln(L) + D \\ 0 = Du(2L) = -\frac{Lf}{a_0} + \frac{C}{2L} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2L^2 f}{a_0}, \quad D = \frac{L^2 f}{a_0}\left(1 - 2\ln(L)\right)$$

$$u(x) = \frac{L^2 f}{a_0}\left(-\frac{x}{L} + \underbrace{2\ln(x) - 2\ln(L)}_{=2\ln\left(\frac{x}{L}\right)} + 1\right)$$

$$= \frac{L^2 f}{a_0}\left(1 - \frac{x}{L} + 2\ln\left(\frac{x}{L}\right)\right)$$

Flödestätheten: $j(x) = -a(x)Du(x) =$

$$= -\frac{a_0 x}{L} Du(x) \overset{(*)}{=} -\frac{a_0}{L}\left(-\frac{Lf}{a_0}x + 2\frac{L^2 f}{a_0}\right)$$

$$= -fL\left(2 - \frac{x}{L}\right). \qquad \left[\frac{J}{m^2 s}\right]$$

Vid $x = L$: $j(L) = -fL$, åt vänster, utåt.

Vid $x = 2L$: $j(2L) = 0$, perfekt isolerad.

Värme flödar in med konstant källtäthet f inuti plattan och flödar ut vid vänstra randen.

7 (a)

$$\begin{cases} x = z\cos(\theta), \\ y = z\sin(\theta), \quad 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le z \le 1. \\ z = z, \end{cases}$$

Tangenter:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -z\sin(\theta)\mathbf{i} + z\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = z\cos(\theta)\mathbf{i} + z\sin(\theta)\mathbf{j} - z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$$

Ytelementet:

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{N}|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \sqrt{2}z\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

(b) På den buktiga delen S_1 av ytan, enligt ovan (vi ser att $\mathbf{N}$ pekar utåt):

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}|\mathbf{N}|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \mathbf{N}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k})\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

så att

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{S_1} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k})\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \iint_{S_1} 0\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = 0$$

På toppytan S_2:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta), \quad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi, \\ z = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\ \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k},\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = 1$$

så att

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_2} \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

Alltså:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \pi$$

(b)

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = 3$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V = 3\iiint_D \mathrm{d}V = 3\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^z r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\int_0^z r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 6\pi\int_0^1 \frac{z^2}{2}\,\mathrm{d}z = \pi$$