MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Gustav Kettil/Stig Larsson
Telefonvakt: Gustav Kettil (076–8188468)

MVE255 2018
2018–05–29 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårlästa lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

`/stig`

[Denna sida ska vara blank.]

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamensuppgifter

---

1. Skriv ned hur man plottar ytan $z = \sin(xy)$, $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ i MATLAB. (3p)

2. Skriv ned hur man plottar en halvcirkel i rummet med centrum i origo och radie 1, som går genom punkterna $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(-1, 0, 0)$. Tips: parametrisera och använd `plot3`. (3p)

3. Skriv ned hur man beräknar Hesse-matrisen av funktionen $f(x, y, z) = xyz$ i punkten $(1, 2, 3)$ med hjälp av MATLAB-funktionen `jacobi.m` från datorövningarna. Det får antas att filen `jacobi.m` finns. (3p)

4. Skriv ned hur man löser ekvationssystemet (3p)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 5 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

med MATLAB-programmet `newton.m` från datorövningarna.

5. PDE Toolbox har randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem": (3p)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n \cdot (c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vi har fyllt i följande data: $c = 1$, $a = 0$, $f = 0$, $q = 3$, $g = 30$, $h = 1$, $r = 5$. Det finns inga yttre värmekällor på randen. Vad är då omgivningens temperatur på S_1 respektive S_2?

6. Vi vill minimera funktionen $f(x, y) = x^4 + y^6$ över cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$. Ställ upp ekvationerna i Lagranges multiplikatormetod för detta problem. (Du skall inte lösa dem.) (3p)

7. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C xy \, \mathrm{d}s$ där C är räta linjen från origo till punkten $(1, 2, 3)$. (3p)

8. Bestäm en potential till vektorfältet $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$. (3p)

9. Skriv ned produktderiveringsregeln för $\nabla \cdot (\phi\mathbf{F})$. (3p)

10. Hastighetsfältet i en vätskeströmning är $\mathbf{v} = v\Big((x/R)^2\mathbf{i} + (y/R)\mathbf{j} - 2(xz/R^2)\mathbf{k}\Big)$. Beräkna volymsflödet ut ur klotet $B\colon x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Enheter: v `[m/s]`, R `[m]`. Svara med enhet. Tips: Gauss sats. (3p)

11. Härled följande partialintegrationsformel i tre variabler: (5p)

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}V$$

12. Förskjutningen u `[m]` i en stång av längden L `[m]`, som är fast inspänd i ena änden och utsatt för en dragkraft P `[N]` i andra änden, uppfyller randvärdesproblemet: (5p)

$$\begin{aligned}&-\mathrm{D}\Big(EA(x)\mathrm{D}u(x)\Big) = 0, \quad x\in(0,L),\\ &u(0)=0,\\ &EA(L)\mathrm{D}u(L)=P.\end{aligned}$$

Tvärsnittsarean är $A(x) = A_0\Big(1+a\dfrac{x}{L}\Big)$ med positiva parametrar a och A_0 `[m`^{2}`]`. Youngs modul E `[N/m`^{2}`]` är konstant.

(a) Beräkna förlängningen, dvs $u(L)$.

(b) Antag att L, P, E och A_0 har givna värden. Bestäm a så att förlängningen blir lika med ett givet värde, dvs $u(L)=\delta$. Tips: förenkla genom att antaga att a är litet och använd Taylor-approximationen $\ln(1+a)\approx a-\frac{1}{2}a^2$.

13. Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet (5p)

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & \text{i } D,\\ u = u_{\mathrm{A}} & \text{på } S_1,\\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u-u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S_2.\end{cases}$$

14. Beräkna massan av halvsfären $S\colon x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0$, som är gjord av material med masstätheten $\rho(x,y,z)=\rho_0\Big(\dfrac{z}{R}\Big)^3$, där ρ_0 `[kg/m`^{2}`]` är konstant. Tips: $M=\iint_S \rho\,\mathrm{d}S$. (5p)

`/stig`

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Gustav Kettil/Stig Larsson
Telefonvakt: Gustav Kettil (076–8188468)

MVE255 2018
2018–05–29 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Gustav Kettil/Stig Larsson
Telefonvakt: Gustav Kettil (076-8188468)

MVE255 2018
2018-05-29 kl. 14:00-18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng

1	`>> x = linspace(-1,1);`
	`>> [X, Y] = meshgrid(x,x);`
	`>> Z = sin(X.*Y); surf(X,Y,Z)`	

2	`>> t = linspace(0,pi);`
	`>> x = cos(t); y = zeros(size(t)); z = sin(t);`
	`>> plot3(x,y,z)`	

3	`>> f = @(x) (x(1)*x(2)*x(3));`
	`>> Df = @(x) jacobi(f,x)';`
	`>> x0 = [1;2;3]; H = jacobi(Df, x0)`	

4	`>> f = @(x) [x(1)^2 + x(2)^2 + x(3)^2 - 5;`
	`x(1) + x(2) + x(3) - 1; x(1) + x(2) - 3]`
	`>> x0 = [0;0;0]; x = newton(f, x0, 1e-6)`	

5	$\mu_A = 5$ på S_1, $\mu_A = 10$ på S_2	
6	$\begin{cases} 4x^3 + 2\lambda x = 0 \\ 6y^5 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0 \end{cases}$	
7	$\frac{2}{3}\sqrt{14}$	
8	$\phi(x,y,z) = xz^2 + 3y^2$	
9	$\nabla \cdot (\phi \mathbb{F}) = \nabla\phi \cdot \mathbb{F} + \phi\, \nabla \cdot \mathbb{F}$	
10	$\frac{4}{3}\pi v R^2$ m^3/s	

MVE255 2018-05-29

5. $u_A = r = 5$ på S_1, $g = q\, u_A$, $u_A = \frac{30}{3} = 10$ på S_2

6. $L = x^4 + y^6 + \lambda(x^2 + y^2 - R^2)$

$$\begin{cases} L'_x = 4x^3 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 6y^5 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

7. $\mathbf{r} = t(1,2,3)$, $t \in (0,1)$

$\dot{\mathbf{r}} = (1,2,3)$, $ds = |\dot{\mathbf{r}}|\,dt = \sqrt{14}\,dt$

$$\int_C xy\,ds = \int_0^1 t \cdot 2t\,\sqrt{14}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{14}$$

8. $\phi'_x = z^2 \Rightarrow \phi = z^2 x + f(y,z)$

$\phi'_y = 6y \Rightarrow \phi = 3y^2 + g(x,z)$

$\phi'_z = 2xz \Rightarrow \phi = xz^2 + h(x,y)$

10. $\nabla \cdot \mathbf{v} = v\left(\frac{2x}{R^2} + \frac{1}{R} - \frac{2x}{R^2}\right) = \frac{v}{R}$

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{v}\,dV = \iiint_B \frac{v}{R}\,dV =$$

$$= \frac{v}{R}\,\mathrm{vol}(B) = \frac{v}{R} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi v R^2$$

enhet: $\frac{m}{s}\, m^2 = \frac{m^3}{s}$

11. $\iint_S (\hat{N}\cdot\mathbb{F})\phi \, dS = \iint_S \hat{N}\cdot(\mathbb{F}\phi)\, dS = \{\text{Gauss sats}\} =$

$= \iiint_D \nabla\cdot(\mathbb{F}\phi)\, dV = \{\text{produktderivata}\} =$

$= \iiint_D \left((\nabla\cdot\mathbb{F})\phi + \mathbb{F}\cdot\nabla\phi\right) dV$

12. (a) $\quad -D\left(E A(x)\, Du(x)\right) = 0$

$- E A(x)\, Du(x) = C_1$

Randvillkor: $\quad C_1 = -E A(L)\, Du(L) = -P$

$\Rightarrow C_1 = -P$

Vi får $\quad E A(x)\, Du(x) = P$

$$Du(x) = \frac{P}{EA_0}\,\frac{1}{1+ax/L}$$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x Du(y)\, dy = 0 + \frac{P}{EA_0}\int_0^x \frac{dy}{1+ay/L}$$

$$= \frac{P}{EA_0}\left[\frac{L}{a}\ln(1+ay/L)\right]_0^x =$$

$$= \frac{PL}{EA_0}\,\frac{\ln(1+ax/L)}{a}$$

$$u(L) = \frac{PL}{EA_0}\,\frac{\ln(1+a)}{a}.$$

(b) Taylor: $\ln(1+a) \approx a - \frac{1}{2}a^2$ då $a \approx 0$.

Vi vill: $\delta = u(L) = \frac{PL}{EA_0} \frac{\ln(1+a)}{a} \approx \frac{PL}{EA_0}\left(1 - \frac{1}{2}a\right)$

$$\Rightarrow \quad a \approx 2\left(1 - \frac{EA_0}{PL}\delta\right)$$

---

13. Multiplicera med testfunktion v sådan att $v = 0$ på S_1:

$$\iiint_D f v \, dV = \iiint_D -\nabla \cdot (a \nabla u) v \, dV = \{\text{part. integ.}\}$$

$$= \iint_S -\hat{N} \cdot (a \nabla u) v \, dS + \iiint_D (a \nabla u) \cdot \nabla v \, dV$$

$$= \{v = 0 \text{ på } S_1\} = \iint_{S_2} (-a \hat{N} \cdot \nabla u) v \, dS +$$

$$+ \iiint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, dV$$

Här är $-a\hat{N} \cdot \nabla u = -a D_{\hat{N}} u = k(u - u_A) - g$ på S_2. Den svaga formuleringen blir då:

Finn u med $u = u_A$ på S_1 sådan att

$$\iiint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, dV + \iint_{S_2} k u v \, dS = \iiint_D f \cdot v \, dV + \iint_{S_2} (k u_A + g) v \, dS$$

för alla testfunktioner v med $v = 0$ på S_1.

14. Ytan är en graf: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $D: x^2 + y^2 \le R^2$.

Vi har $z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$

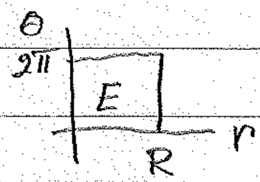
Ytelementet: $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\,dy = \dfrac{R}{z}\, dx\,dy$

Massan:

$$M = \iint_S \rho\, dS = \iint_S \rho_0 \left(\frac{z}{R}\right)^3 \frac{R}{z}\, dx\,dy =$$

$$= \rho_0 \frac{1}{R^2} \iint_S z^2\, dx\,dy = \rho_0 \frac{1}{R^2} \iint_S (R^2 - x^2 - y^2)\, dx\,dy$$

$$= \left\{ \text{polära koordinater} \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} (r,\theta) \in E \right\}$$



$$= \rho_0 \frac{1}{R^2} \iint_E (R^2 - r^2)\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \rho_0 \frac{1}{R^2} \int_0^R (R^2 - r^2) r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \rho_0 \frac{1}{R^2} \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \cdot 2\pi = \pi \rho_0 R^2$$

/Stig