MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Gustav Kettil/Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Linnea Hietala 5325

MVE255 2018
2018–08–31 kl. 08:30–12:30 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

`/stig`

[Denna sida ska vara blank.]

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamensuppgifter

---

1. Skriv ned hur man plottar ytan $z = 1 - x^2 - y^2$, $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$ i MATLAB. (3p)

2. Skriv ned hur man plottar en rät linje som går från punkten (1,1,1) till (4,5,6) i MATLAB. Tips: parametrisera och använd `plot3`. (3p)

3. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = x^2 + 3y^2$ i punkten (1,1,4). (3p)

4. Är vektorfältet $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ konservativt? Motivering krävs. (3p)

5. PDE Toolbox har randvärdesproblem av typen “Generic scalar problem”: (3p)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n \cdot (c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vi har fyllt i följande data: $c = 10$, $a = 0$, $f = 20$, $q = 5$, $g = 25$, $h = 1$, $r = 7$. Det finns inga yttre värmekällor på randen. Vad är då omgivningens temperatur på S_1 respektive S_2?

6. Skriv ned Newtons metod i MATLAB. Antag att funktionen `jacobi.m` finns. (3p)

7. Beräkna integralen $\iint_T \sin(x + y)\,\mathrm{d}A$ där T är triangeln med hörn i (0,0), (1,0), (0,1). (3p)

8. Skriv ned Taylors polynom av grad 2 med baspunkt $a = (2, 2)$ för funktionen $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2$. (3p)

9. Betrakta integralen $\iiint_B (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}V$ där B är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Transformera denna integral till sfäriska koordinater. Du ska inte räkna ut integralen. (3p)

10. Formulera divergenssatsen. (3p)

11. (a) Härled Newtons metod med hjälp av linjärisering. (5p)

(b) Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\\
&x_2 x_3 - x_3 = 0\\
&x_3^2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

med startpunkt $(1, 1, 1)$.

12. Förskjutningen u `[m]` i en stång av längden L `[m]`, som är fast inspänd i ena änden och fri i andra änden och utsatt för en konstant inre last K `N/m`^{3}, uppfyller randvärdesproblemet: (5p)

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{D}\Big(EA\mathrm{D}u(x)\Big) = KA, \quad x \in (0, L),\\
&u(0) = 0,\\
&EA\mathrm{D}u(L) = 0.
\end{aligned}$$

Tvärsnittsarean A `[m`^{2}`]` och Youngs modul E `[N/m`^{2}`]` är konstanta.

(a) Beräkna förlängningen, dvs $u(L)$.

(b) Skriv ned den svaga formuleringen av detta randvärdesproblem.

13. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ut ur området $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq 1\}$ utan att använda divergenssatsen. (5p)

14. Härled randvillkoret (5p)

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S$$

för värmeledningsekvationen. Förklara vad termerna $a, u, k, u_A, g, \hat{\mathbf{N}}$ betyder och ange deras enheter.

`/stig`

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Gustav Kettil/Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Linnea Hietala 5325

MVE255 2018
2018–08–31 kl. 08:30–12:30 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

MVE255 2018-08-31

1.
```
>> x = linspace(-1,1);
>> [X,Y] = meshgrid(x,x);
>> Z = 1 - X.^2 - 3*Y.^2;
>> surf(X,Y,Z)
```

2. $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = (4,5,6) - (1,1,1) = (3,4,5)$, $\mathbf{r} = (1,1,1) + t(3,4,5)$, $t \in [0,1]$
```
>> t = linspace(0,1);
>> x = 1 + 3*t; y = 1 + 4*t; z = 1 + 5*t;
>> plot3(x,y,z)
```

3. $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + 3v^2 \end{cases}$ $\quad \mathbf{N} = \mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v' = [-2u, -6v, 1] \overset{(1,1,4)}{=} [-2, -6, 1]$

Planets ekv: $\quad -2(x-1) - 6(y-1) + (z-4) = 0$

$$2x + 6y - z = 4$$

4. Ja, ty $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

5. $u_A = 7$ på S_1, $u_A = 5$ på S_2.

6.
```
function x = newton(f, x, tol)
  h = tol + 1;
  while norm(h) > tol
    A = jacobi(f, x);
    b = -f(x);
    h = A\b;
    x = x + h;
  end
```

7. $\int_0^1\left(\int_0^{1-x} \sin(x+y)\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[-\cos(x+y)\right]_0^{1-x} dx =$

$= \int_0^1 \left(\cos(x) - \cos(1)\right) dx = \sin(1) - \cos(1)$

8. $P_2(x) = f(2,2) + f'(2,2)h + \frac{1}{2}h^T f''(2,2)h =$

$$= 8 + [10, 2]\begin{bmatrix} x_1-2 \\ x_2-2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x_1-2, x_2-2]\begin{bmatrix} 12 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-2 \\ x_2-2 \end{bmatrix}$$

$f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2, \quad f'(x) = [3x_1^2 - x_2, \ 2x_2 - x_1]$

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho^2 \sin^2\phi \ \rho^2 \sin\phi \ d\rho\, d\phi\, d\theta$

10. Antag D är ett område i rummet begränsat av ytan S med utåtriktat enhetsnormalvektor $\hat{N}$ som varierar kontinuerligt. $\mathbb{F}$ glatt vektorfält i D. Då gäller

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV$$

11. (a) Antag att vi en approximativ lösning a.
Linjärisera kring a: $L_f(x) = f(a) + f'(a)h$
där $h = x - a$.
Lös linjäriserade ekvationen: $L_f(x) = 0$
dvs $f'(a)h = -f(a)$. Uppdatera: $x = a + h$.

(b) $f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ x_2 x_3 - x_3 \\ x_3^2 - 1 \end{bmatrix}$, $b = -f(1,1,1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & x_3 & x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix}$, $A = f'(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$Ah = b$ $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

---

12. (a) $-D(EA\,Du(x)) = KA$

$-EA\,Du(x) = KAx + C_1$

Randvillkor: $0 = EA\,Du(L) = KAL + C_1 \Rightarrow C_1 = -KAL$

$-EA\,Du(x) = KAx - KAL$

$Du(x) = \frac{K}{E}(L - x)$

$u(x) = \frac{K}{E}\left(Lx - \frac{1}{2}x^2\right) + C_2$

Randvillkor: $0 = u(0) = C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$u(x) = \frac{K}{E}x\left(L - \frac{1}{2}x\right)$

Förlängningen: $u(L) = \frac{1}{2}\frac{KL^2}{E}$ $\left[\frac{N}{m^3}\frac{m^2}{N/m^2} = m\right]$

(b) Finn u sådan att $u(0) = 0$ och

$$\int_0^L EA\,Du(x)\,Dv(x)\,dx + EA\,Du(L)\,v(L) = \int_0^L KA\,v(x)\,dx$$

för alla testfunktioner v med $v(0) = 0$.

13. Parametrisering av den buktiga delen S_1 av ytan ($z = x^2 + y^2 = r^2$):

$$\begin{cases} x = \sqrt{z}\cos(\theta), \\ y = \sqrt{z}\sin(\theta), \quad 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le z \le 1. \\ z = z, \end{cases}$$

Tangenter:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\sqrt{z}\sin(\theta)\mathbf{i} + \sqrt{z}\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\cos(\theta)\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{z}}\sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \sqrt{z}\cos(\theta)\mathbf{i} + \sqrt{z}\sin(\theta)\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

Vi ser att $\mathbf{N}$ pekar utåt och

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}|\mathbf{N}|\, d\theta\, dz = \mathbf{N}\, d\theta\, dz$$

så att flödet blir

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, d\theta\, dz = \iint_{S_1} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\cdot(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k})\, d\theta\, dz$$
$$= \iint_{S_1} (x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2)\, d\theta\, dz = \int_0^1\int_0^{2\pi} (z - \frac{1}{2}z^2)\, d\theta\, dz = 2\pi(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}) = 2\pi/3$$

På toppytan S_2:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta), \quad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi, \\ z = 1, \end{cases}$$

$$dS = r\,dr\,d\theta,\ \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k},\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = z^2 = 1$$

så att

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{S_2} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = \pi$$

Alltså blir totala flödet

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = 2\pi/3 + \pi = 5\pi/3$$

14. Värmeflödestätheten ut genom ytan:

$$\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}} = k(u - u_A) - g$$

är proportionell mot temperaturskillnaden $u - u_A$ och $g\left[\frac{J}{m^2 s}\right]$ är inflödestätheten av värmekälla på ytan.

Joules lag: $\mathbb{F} = -a\nabla u$, $\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}} = -a D_{\hat{\mathbb{N}}} u$.

Alltså: $a D_{\hat{\mathbb{N}}} u + k(u - u_A) = g$ på S.

$a\left[\frac{J}{mKs}\right]$ värleduingskoeff., $u\,[K]$ inre temp.

$u_A\,[K]$ omg. temp., $k\left[\frac{J}{m^2 s K}\right]$ värmeöverförings koeff.

/Stig