MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Henrik Imberg 6457

MVE255 2019
2019–08–30 kl. 08:30–12:30 (M)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

/stig

[Denna sida ska vara blank.]

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Henrik Imberg 6457

MVE255 2019
2019–08–30 kl. 08:30–12:30 (M)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamensuppgifter

---

1. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $\mathbf{r} = (1+t)\mathbf{e}_x + t^2\mathbf{e}_y + (2-t^3)\mathbf{e}_z$ i punkten $(3, 4, -6)$. (3p)

2. Beräkna arbetet som kraften $\mathbf{F} = y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y + y\mathbf{e}_z$ uträttar på en partikel som rör sig enligt $\mathbf{r} = 3t\mathbf{e}_x - t\mathbf{e}_y + t^2\mathbf{e}_z$, $t \in [0, 1]$. (3p)

3. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z^2 + 2x^2 - 3y^2 = 0$ i punkten (1,1,1). (3p)

4. Vad menas med att ett vektorfält är konservativt? (3p)

5. PDE Toolbox har randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem": (3p)

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n\cdot(c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Det finns inga yttre värmekällor på randen. Omgivningens temperatur är 30 överallt. På en del av randen har vi ingen isolering medan resten av randen är isolerad med värmeöverföringskoefficienten 5. Vad ska vi fylla i för värden på q, h, r, g?

6. Skriv ned Newtons metod som en MATLAB-funktion. Antag att funktionen `jacobi.m` finns. (3p)

7. Skriv ned Taylors polynom av grad 2 i punkten $(1, 1)$ för funktionen $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2$. (3p)

8. Beräkna $\iint_T \exp(-x^2)\,\mathrm{d}A$ där T är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. (3p)

9. Betrakta integralen $\iiint_B z\,\mathrm{d}V$ där B är halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0$. Transformera denna integral till cylindriska koordinater. Du ska inte räkna ut integralen. (3p)

10. Visa att $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ om $\mathbf{F}$ är ett konservativt fält. (Använd kända räkneregler för nablaoperatorn.) (3p)

`Vänd!`

11. (Laplace-operatorn i sfärisk symmetri) Låt x, y, z vara cartesiska koordinater och ρ, ϕ, θ vara sfäriska koordinater. Antag att funktionen u är sfäriskt symmetrisk, dvs $u = u(\rho)$ beror endast på ρ men ej på ϕ, θ. Visa att (5p)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho^2 \frac{du}{d\rho}\Big)$$

12. (Lokala extrempunkter) (5p)

(a) Undersök funktionen $f(x, y) = 3x^2 - y^3 - 6xy$ med avseende på lokala extrempunkter. (3p)

(b) Visa hur man gör detta i MATLAB med programmen `newton.m` och `jacobi.m`. (2p)

13. (Flödesintegral) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x^3\mathbf{e}_x + y^3\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ut ur klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ med hjälp av Gauss divergenssats. (5p)

14. (Härledning av värmeledningsekvationen) Härled randvillkoret (5p)

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S$$

för värmeledningsekvationen. Förklara vad termerna $a, u, k, u_A, g, S, \hat{\mathbf{N}}, S$ betyder och ange deras SI-enheter.

`/stig`

MVE255 Analys i flera variabler M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

MVE255 2019-08-30

1. $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, -3t^2)$, $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(2) = (1, 4, -12)$, $P = \mathbf{r}(2) = (3, 4, -6)$

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = -6 - 12t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

2. $\mathbf{r}'(t) = (3, -1, 2t)$, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt =$

$$= \int_0^1 (-t, 3t, -t) \cdot (3, -1, 2t)\,dt = \int_0^1 (-6t - 2t^2)\,dt =$$

$$= -3 - \frac{2}{3} = -\frac{11}{3}$$

3. $z = \pm \sqrt{-2x^2 + 3y^2}$, $P = (1, 1, 1)$

$$\mathbf{N} = (-f_x'(1,1), -f_y'(1,1), 1) = (2, -3, 1)$$

Tangentplanet: $2(x-1) - 3(y-1) + z - 1 = 0$

$2x - 3y + z = 0$

4. $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för något skalärt fält ϕ.

5. $h = 1$, $r = 30$, $q = 5$, $g = 150$

6.
```
function x = newton(f, x0, tol)
  x = x0;  b = -f(x);
  while norm(b) > tol
     b = -f(x);
     A = jakobi(x);
     h = A\b;
     x = x + h;
  end
end
```

MVE255 2019-08-30

7. $P_2(x) = f(1,1) + f'(1,1)h + \frac{1}{2}h^T f''(1,1)h =$

$$= 1 + [2, 1]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[h_1, h_2]\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + 2(x_1-1) + (x_2-1) + \frac{1}{2}\left(6(x_1-1)^2 - 2(x_1-1)(x_2-1) + 2(x_2-1)^2\right)$$

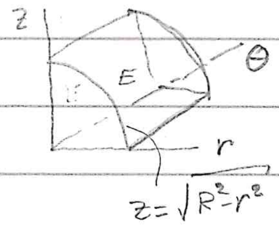
$(= 3x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1 + 1)$

8. $$\iint_T e^{-x^2}\,dA = \int_0^1\left(\int_0^x e^{-x^2}\,dy\right)dx = \int_0^1 e^{-x^2}[y]_0^x\,dx =$$

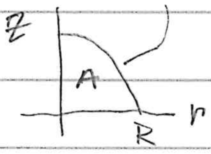
$$= \int_0^1 e^{-x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{e^{-x^2}\cdot 2x\,dx}_{=-\frac{d}{dx}e^{-x^2}} = \frac{1}{2}\left[-e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-1}) =$$

$$= \frac{e-1}{2e}$$

9. $$\iiint_B z\,dV = \iiint_E z\,r\,dr\,d\theta\,dz =$$



$$= \int_0^{2\pi}\left(\iint_A zr\,dr\,dz\right)d\theta$$



$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} zr\,dz\right)dr$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\left(r\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z\,dz\right)dr \qquad = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\left(r\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z\,dz\right)dr$$

10. $\nabla\times\mathbb{F} = \nabla\times(\nabla\phi) = \mathbb{0}$ enligt räkneregel.

MVE255 2019-08-30

11. $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{\rho}$

Kedjeregeln: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{du}{d\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = u'(\rho)\dfrac{x}{\rho}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''(\rho)\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + u'(\rho)\frac{\partial}{x}\left(\frac{x}{\rho}\right) =$$

$$= u''(\rho)\frac{x^2}{\rho^2} + u'(\rho)\frac{\rho - x\frac{\partial \rho}{\partial x}}{\rho^2} \overset{\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}}{=}$$

$$= u''(\rho)\frac{x^2}{\rho^2} + u'(\rho)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right)$$

På samma vis: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''(\rho)\dfrac{y^2}{\rho^2} + u'(\rho)\left(\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{y^2}{\rho^3}\right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u''(\rho)\frac{z^2}{\rho^2} + u'(\rho)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{z^2}{\rho^3}\right)$$

Då får vi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u''(\rho)\underbrace{\frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^2}}_{=1} + u'(\rho)\left(\frac{3}{\rho} - \underbrace{\frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^3}}_{=\frac{1}{\rho}}\right)$$

$$= u''(\rho) + \frac{2}{\rho}u'(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 u'(\rho)\right)$$

---

12. (a) $f(x,y) = 3x^2 - y^3 - 6xy$. Inga singulära punkter.
Kritiska punkter ges av

$$f'(x,y)^T = \begin{bmatrix} 6x-6y \\ -3y^2-6x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rötterna är $(0,0)$ och $(-2,-2)$.

Hessematrisen är $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6y \end{bmatrix}$.

I punkten $(0,0)$: $f''(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

med egenvärdena $3 \pm \sqrt{45}$ med olika tecken.
Kritiska punkten $(0,0)$ är sadelpunkt.

I punkten $(-2,-2)$: $f''(-2,-2) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$

med egenvärdena $9 \pm \sqrt{45}$, båda positiva.
Punkten $(-2,-2)$ är lokal minimipunkt.

12.(6)
```
f(x) = @(x) 3*x(1)^2 - x(2)^3 - 6*x(1)*x(2)
Df = @(x) jacobi(f,x)';
x0 = [1;T];
x = newton(Df; x0, 1e-6);
H = jacobi(Df, x);
eig(H)
```

---

13. Gauss divergenssats: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$

Sfäriska koord.: $\begin{cases} x = \rho \sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\phi) \end{cases}$

B: $\rho \in [0,1]$, $\phi \in [0,\pi]$, $\theta \in [0,2\pi]$,

$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 1 = 3\rho^2 \sin^2\phi + 1$

$$\iiint_B \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \{ \text{Fubini} \} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{1} (3\rho^2 \sin^2(\phi) + 1)\, \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho \right) d\phi \right) d\theta$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3(\phi)\, d\phi \int_0^{1} \rho^4\, d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin(\phi)\, d\phi \int_0^{1} \rho^2\, d\rho$$

$$= 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} + 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{44}{15}\pi$$

där vi räknat $\int_0^{\pi} \sin(\phi)\, d\theta = \left[-\cos(\phi) \right]_0^{\pi} = 2$

och $\int_0^{\pi} \sin^3(\phi)\, d\theta = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2(\phi)) \sin(\phi)\, d\theta = \{ s = -\cos(\phi) \}$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - s^2)\, ds = \frac{4}{3}.$$

---

14. Se boken.

/Stig