MVE255 Analys i flera variabler M

VECKOPM 4

Läsvecka 4 är delad i två delar: vecka 4a före påsk och vecka 4b efter påsk.
Temat för vecka 4a är randvärdesproblem och finita elementmetoden i 1-D, avsnitt kapitel 3.
Program för vecka 4b kommer senare.
Obs: Tentamensgranskning linjär algebra måndag 15 april 11.45 i HB4 efter min föreläsning.

Rekommenderade uppgifter.

Alla i kapitel 2.

Datorövningar.

Mål. Att lära hur man löser randvärdesproblem i en variabel med finita elementmetoden i Matlab. Detta är även en förberedelse för Matlabs PDE Toolbox för finita element i två variabler. Uppgifter på detta material kommer även på Dugga 2 i vecka 5.

Litteratur. Kapitel 3 och `Stången`.

Matlab-program. `MyPoissonSolver.m`. `BdryData1.m`. `EqData1.m`.

Kopiera filerna genom att klicka på länkarna här eller gå till länken “Matlab” på kurshemsidan och ladda ned dem därifrån. Skriv `help MyPoissonSolver` på kommandoraden och läs dokumentationen.

Inledning. Programmet `MyPoissonSolver` löser randvärdesproblem av typen

$$\begin{aligned} &-\mathrm{D}(a(x)\mathrm{D}u(x)) + d(x)\mathrm{D}u(x) + c(x)u(x) = f(x), \qquad && \text{för } x \in I = (K, L), \\ &a(x)\mathrm{D}_n u(x) + k(x)(u(x) - u_A(x)) = g(x), && \text{för } x = K,\ x = L. \end{aligned}$$

Här är $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ och D_n riktningsderivatan i utåtriktningen, dvs $\mathrm{D}_n = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ i $x = K$ och $\mathrm{D}_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ i $x = L$. Programmet bygger på finita elementmetoden med styckvis linjära funktioner.

Funktionen `MyPoissonSolver` med deklarationen

```
function [U, A, b] = MyPoissonSolver(p, t, e, EqData, BdryData)
```

ställer upp och löser ekvationssystemet $AU = b$, där A är styvhetsmatrisen, b är lastvektorn och vektorn U innehåller nodvärdena $U_i = U(x_i)$ till finita elementlösningen $U(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i \phi_i(x)$.

Information om beräkningsnätet lagras i matriserna `p,t,e` med samma struktur som i Matlabs PDE Toolbox som vi ska använda senare (även i mekanikkursen). Problemets data, a, d, c, f, u_A, g, definieras i funktionsfilerna `EqData.m` och `BdryData.m`.

Matrisen `p`. Koordinaterna för noderna

$$K = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = L$$

lagras i vektorn `p` av typ $1 \times n$.

Matrisen `t` av typ $3 \times (n-1)$ innehåller information om de $n-1$ intervallen

$$I_i = (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Närmare bestämt innehåller kolonn nr i de index (pekare) som pekar på ändpunkterna i intervall nr i, dvs

$$\begin{bmatrix} i \\ i+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den tredje siffran är ett märke (”subdomain reference tag”), som jag satt till 1 här, och som kan användas till att markera vilket delområde som intervallet I_i tillhör, om man fått för sig att dela

Date: 2019–04–12, Stig Larsson, Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola.

in intervallet $I = (K, L)$ i delområden. Detta kan vara praktiskt om koefficienterna ges av olika formler i olika delar av I.

Matrisen `e` innehåller information om randpunkterna,

$$e = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Här är första raden pekare (index) som pekar på de två randpunkterna, här x_1 och x_n. Den andra raden är märken (”reference tags”) som används för att markera vilken randpunkt det är, här betyder 1 vänster ändpunkt och 2 höger ändpunkt. Eftersom man använder pekare spelar det ingen roll i vilken ordning man skriver dem. Följande matris ger samma resultat:

$$e = \begin{bmatrix} n & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detsamma gäller matrisen `t`.

Detta kan verka onödigt krångligt, men det är en bra förberedelse för PDE Toolbox, där denna struktur behövs för att beskriva en indelning av ett två-dimensionellt område i trianglar. I två dimensioner finns ju ingen naturlig numrering av punkter, trianglar och randpunkter och man måste använda pekare på detta vis. I PDE Toolbox syftar `p,t,e` på ”points”, ”triangles”, ”edges”.

Uppgifter.

Uppgift 1. Styckvis linjär funktion. Skapa ett nät i intervallet $I = (0, 1)$ med endast $n = 9$ punkter (så att man kan tydligt se alla).

```
>> n=9
>> p=linspace(0,1,n)
>> t=[1:n-1; 2:n; ones(1,n-1)]
>> e=[1 n; 1 2]
```

Skapa och plotta en styckvis linjär funktion, till exempel,

```
>> V=sin(7*p)
>> plot(p,V,'.-')
```

Kom ihåg att funktionen kan skrivas som en linjär kombination av basfunktionerna:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i \phi_i(x),$$

där $V_i = V(x_i)$ är nodvärdena som vi skapade nyss. Skapa och plotta även en av basfunktionerna, till exempel ϕ_5. (Se figur 3.4 i kapitel 3.)

Uppgift 2. MyPoissonSolver. Kör programmet med samma nät och med de bifogade funktionsfilerna `EqData1.m` och `BdryData1.m`. Läs dokumentationen (`help MyPoissonSolver`) och filerna för att se vilket randvärdesproblem det är. (Det är ett av problemen i kapitel 3.)

```
>> [U, A, b] = MyPoissonSolver(p, t, e, @EqData1, @BdryData1);
```

Titta på styvhetsmatrisen A och se att den är tridiagonal.

Plotta den approximativa lösningen U och den exakta lösningen u.

Förfina nätet till $n = 101$ punkter och beräkna igen.

Uppgift 3. Värmeledning i inhomogent material. Lös följande randvärdesproblem

$$\begin{aligned} -\,\mathrm{D}(a\mathrm{D}u) &= f \quad \text{i } I = (0, 1), \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

med

$$f(x) = x, \quad a(x) = 1 \text{ för } x < 1/2,\ a(x) = 10 \text{ för } x > 1/2.$$

Detta är Datorövning 6 från lp2. Vad är den fysikaliska betydelsen?

Du bör skriva nya funktionsfiler `EqData3.m` och `BdryData3.m` för denna uppgift.

Uppgift 4. Stång av två material. Lös följande randvärdesproblem

$$-\,\mathrm{D}(EA\,\mathrm{D}u) = \rho g A \quad \text{i } I = (0, L),$$
$$u(0) = 0,\ E(L)A\,\mathrm{D}u(L) = P,$$

med

$$E(x) = \begin{cases} 7, & x < L/2, \\ 22, & x > L/2, \end{cases} \qquad \rho(x) = \begin{cases} 3, & x < L/2, \\ 8, & x > L/2, \end{cases}$$

och $L = 1,\ A = 1,\ g = 9.81$. Här har vi använt dimensionlösa storheter, dvs alla variabler är multipler av lämpligt valda referensvärden. Till exempel, E ges som multipel av $E_0 = 10^{10}$ N/m^2 och ρ som multipel av $\rho_0 = 10^3$ kg/m^3 (aluminium och järn).

Experimentera med olika värden på P. Vad är den mekaniska betydelsen av randvärdesproblemet?

Skriv nya funktionsfiler `EqData4.m` och `BdryData4.m` för denna uppgift.

Frivillig uppgift: Visa att med referensvärden

$$E_0 = 10^{10}\,\mathrm{N/m^2},\ \rho_0 = 10^3\,\mathrm{kg/m^3},\ L_0 = 1\,\mathrm{m},\ g_0 = 1\,\mathrm{m/s^2},\ A_0 = 10^{-4}\,\mathrm{m^2},$$

blir enheterna för u och P

$$u_0 = \frac{\rho_0 g_0 L_0^2}{E_0} = 10^{-7}\,\mathrm{m},\ P_0 = \rho_0 g_0 A_0 L_0 = 10^{-1}\,\mathrm{N}.$$

Uppgift 5. Elasticitet i rotationssymmetri. Lös följande randvärdesproblem (i polära koordinater)

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r^2}u = \frac{1-\nu^2}{E}K_r \quad \text{för } r \in I = (a, b),$$
$$u(a) = 0,\ u'(b) = 0.$$

med $K_r = \rho\omega^2 r$. Se Rotel. Innan man kan använda finita elementmetoden måste ekvationen skrivas om till formen $-\mathrm{D}(a\mathrm{D}u) + cu = f$. Gör följande omskrivning:

$$-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2}u = \frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r.$$

och sedan

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r}u = \frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r^2.$$

Välj lämpliga värden på $a, b, \rho, \omega, E, \nu$. Obs att den inre radien a bör vara > 0. Vad är den mekaniska betydelsen av detta problem?

Skriv nya funktionsfiler `EqData5.m` och `BdryData5.m` för denna uppgift.