Flervariabelanalys I2
Vintern 2012

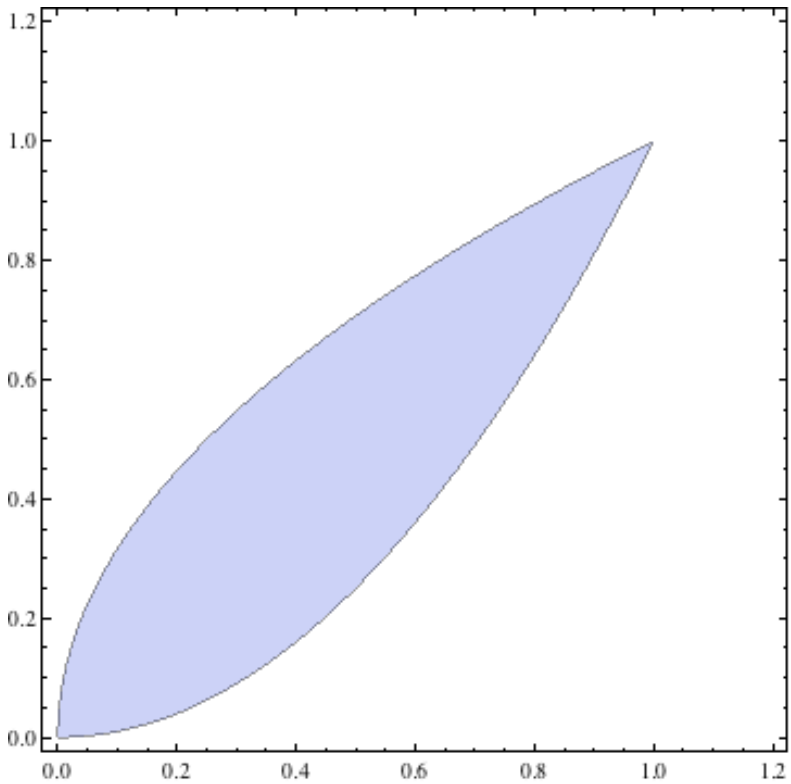
Översikt föreläsningar vecka 6

Den andra veckan om vektoranalys kretsar kring tre stora satser: Green, Gauss och Stoke. Gauss' sats kallas ofta divergenssatsen.

Vi börjar med ett tillfälligt återbesök hos kurvintegraler på vektorfält i planet och presenterar Greens formel: $\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$

Här är γ en sluten, styckvis glatt och positivt orienterad kurva, och D det område som kurvan inneslutar. P och Q måste vara differentierbara i hela D.

Exempel: Beräkna $\int_\gamma \left(y + e^{\sqrt{x}}\right)dx + \left(2x + \cos y^2\right)dy$ där γ är randen av det område som innesluts av kurvorna $y = x^2$ samt $x = y^2$



Lösning: En parametrisering ger en ohygglig integral, så vi använder Greens formel:

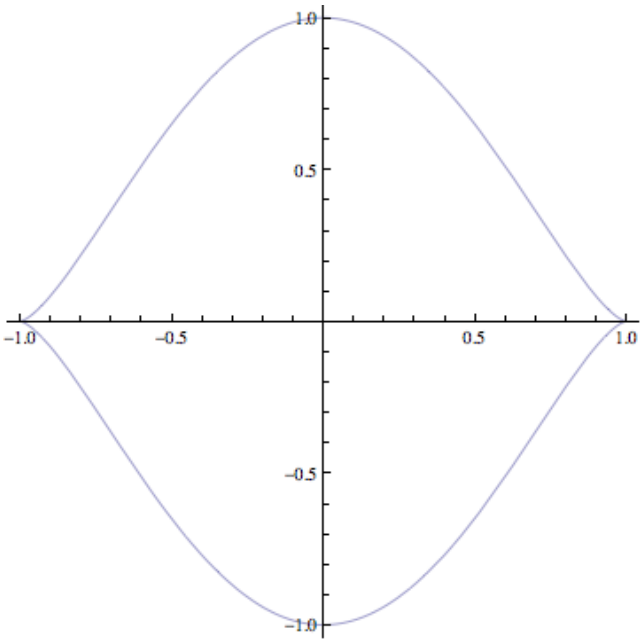
$$\int_\gamma \left(y+e^{\sqrt{x}}\right)dx+\left(2x+\cos y^2\right)dy=\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(2x+\cos y^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(y+e^{\sqrt{x}}\right)dxdy=$$

$$=\iint_D (2-1)dxdy=\int_0^1\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dy\,dx=\frac{1}{3}$$

Ibland använder man Greens formel ”baklänges” och beräknar en dubbelintegral med hjälp av kurvintegral. Den typiska (och så gott som enda) situationen uppstår när man vill beräkna arean av ett område som är inneslutet av en kurva på parameterform.

Greens formel ger nämligen $\int_\gamma xdy=\int_\gamma -ydx=\frac{1}{2}\int_\gamma xdy-ydx=\iint_D dxdy$ där den avslutande dubbelintegralen definitionsmässigt ger arean av området *D*.
Man väljer den av de tre kurvintegralerna som passar bäst med de aktuella funktionerna.

Exempel: Beräkna arean innanför kurvan med parameterframställning $r(t)=\left(\cos t,\sin^3 t\right)\quad 0\le t\le 2\pi$



Lösning: Lösning: arean $=\iint_D dxdy=\int_\gamma xdy=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t\,dt=$

$$=3\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2t}{4}dt=\frac{3\pi}{4}$$

De två övriga satserna utgörs av formler som ger samband mellan dels flödesintegraler och trippelintegraler, dels flödesintegraler och kurvintegraler. Innan dessa presenteras behöver vi två nya begrepp:

För ett vektorfält *F* definierar vi

- Divergensen för F: $divF = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$
- Rotationen för F: $rotF = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$

Namnet rotation kommer från det faktum att om fältet *F* representerar flödeshastighet kommer partiklar i flödet att tendera att rotera kring en axel med riktning *rotF*. (detta är naturligtvis en lokal utsaga, fältets rotationstendens varierar i rummet.)

Divergensen, å andra sidan, kan visas vara ett mätetal för produktionen av det strömmande mediet i en given punkt. Man kallar för övrigt fält där $divF = 0$ för källfria.

Vi kommer att åtminstone troliggöra den så kallade divergenssatsen som med hjälp av just $divF$ ger oss ännu ett sätt att beräkna flödesintegraler:

$$\iint_{\partial K} F \cdot N \, dS = \iiint_K divF \, dxdydz$$

Här är *F* differentierbart och *K* ett kompakt område med rand ∂K orienterad med utåtriktad normal.

Divergenssatsen kan ibland innebära väsentliga förenklingar vid beräkning av flödesintegraler.

Exempel: Beräkna flödet av $F = \left(3xy^2, xe^z, z^3\right)$ ut från ytan av cylindern $y^2 + z^2 = 1$, begränsad av planen $x = -1$ och $x = 2$

Lösning: Det är inte svårt att parametrisera cylinderns yta, men med tanke på hur *F* ser ut kommer dubbelintegralen antagligen att bli besvärlig.

Vi använder i stället divergenssatsen som säger att flödet i detta fall blir $\iiint_K \left(3y^2 + 3z^2\right) dxdydz$ där *K* förstås är cylindern.

Genom att först integrera i *x*-led och sedan använda polära koordinater får vi integralen $9 \iint_{\substack{0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} r^3 \, drd\theta = \frac{9\pi}{2}$

Till slut studerar vi Stokes' sats som är en utvidgning av Greens formel; den ger oss en möjlighet att beräkna kurvintegraler av vissa slutna kurvor i rummet genom att i stället beräkna en flödesintegral:

$$\oint_{\partial Y} u \cdot dr = \iint_Y (rot\, u) \cdot N\, dS$$

Här är u ett vektorfält med differentierbara komponenter och Y ett orienterat ytstycke med orienterad rand ∂Y.
Att randen är orienterad betyder att en normalvektor som rör sig i positiv riktning längs randen har ytan till vänster om sig.
Orienteringen är viktig och ibland inte självklar.

Exempel: Beräkna $\int_C F \cdot dr$ där $F = (-y^2, x, z^2)$ och C är skärningen mellan planet $y + z = 2$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$. C genomlöps motsols om man betraktar den från ovan.

Lösning: Vi vill använda Stokes' sats och beräknar därför rotationen för F: $rot\, F = (0,0,1 + 2y)$.

När vi med hjälp av detta skall ställa upp en ytintegral kan vi ***välja mellan olika ytor***; det enda kravet är att ytans rand skall vara identisk med C. I det här fallet verkar det rimligt att använda planet $y + z = 2$ som parametriseras $r = (x, y, 2 - y)$ så att $r'_x \times r'_y = (0,1,1)$.
På så sätt har vi korrekt orientering; vår normal pekar uppåt.

Vi får $\int_C F \cdot dr = \iint_Y (rot\, F) \cdot N\, dS = \iint_{x^2+y^2=1} (0,0,1 + 2y) \cdot (0,1,1) dxdy$.
Y är alltså den del av planet som ligger innanför cylindern.

Med hjälp av polära koordinater (eller ett symmetriresonemang) bestämmer man lätt den erhållna dubbelintegralen till π.

Notera att vi här hade möjlighet att direkt bestämma enhetsnormalen till planet, $N = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$. Detta hjälper dock föga, ty $(rot\, F) \cdot N = \frac{1+2y}{\sqrt{2}}$, och det krävs ändå en parametrisering för att beräkna ytintegralen.