Flervariabelanalys I2
Vintern 2012

Översikt läsvecka 5

Tidigare i kursen har vi gradienten till en funktion av flera variabler. Den här veckan stöter vi på det omvända problemet: givet ett vektorfält *F*, finns det en funktion *U* sådan att $\nabla U = F$? Om svaret är ja, sägs fältet vara konservativt, och funktionen *U* kallas potential.

De flesta fält är inte konservativa. Antag nämligen att $F = (P,Q)$ är konservativt så att det finns ett *U* med $U'_x = P, \quad U'_y = Q$. Då är ju $U''_{xy} = P'_y$ och på samma sätt $U''_{yx} = Q'_x$. Men de blandade andraderivatorna är lika om *P* och *Q* är av klass C^2. Vi kan alltså dra slutsatsen att om $F = (P,Q)$ är konservativt så måste $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Detta är ett ganska starkt krav på vektorfältet, och det visar sig att det inte ens är tillräckligt för att det skall finnas en potential.

Exempel: Är fältet $F = (x^2 y, -2xy)$ konservativt?
Lösning: Vi prövar: $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = x^2, \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = -2y$. Alltså nej!

Exempel: Är fältet $F = (2xy + \cos 2y, x^2 - 2x\sin 2y)$ konservativt?
Lösning: Vi prövar: $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2x - 2\sin 2y, \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 2x - 2\sin 2y$. Kanske!
Om det finns en potential U, så måste $U'_x = 2xy + \cos 2y$ och följaktligen $U = yx^2 + x\cos 2y + h(y)$. Deriverar vi detta *U* med avseende på y får vi $U'_y = x^2 - 2x\sin y + h'(y)$ som är $= F_2$ om vi väljer $h'(y) = 0$.
Svar: F är konservativt med potentialen $U = yx^2 + x\cos 2y + C$

För tredimensionella fält finns på samma sätt nödvändiga krav för att fältet skall vara konservativt och konstruktionen av en eventuell potential följer samma mönster. Se för övrigt exemplet längst ned på nästa sida.

Återstoden av kursen ägnas åt två nya begrepp: kurvintegral och ytintegral. Av den förra finns det två typer.

<u>Kurvintegral av skalär funktion</u>
Givet en kurva och en reellvärd funktion f kan man definiera kurvintegralen $\int_\gamma f\, ds$.

En sådan integral beräknas genom att kurvan parametriseras, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Man får då $\int_\gamma f\,ds = \int_\alpha^\beta f(r(t))\cdot|r'(t)|dt$, eftersom, som vi sett tidigare, $ds = |r'(t)|dt$. På detta sätt överförs kurvintegralen till en enkelintegral, som åtminstone under lyckliga omständigheter kan beräknas.

Exempel: Beräkna $\int_\gamma f\,ds$ där $f(x,y,z) = xyz$ och γ parametriseras

$$r(t) = (t, 2t, 3t) \quad 0 \le t \le 2$$

Lösning: $|r'(t)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Så $\int_\gamma f\,ds = \int_\alpha^\beta f(r(t))\cdot|r'(t)|dt = \int_0^2 t\cdot 2t\cdot 3t\cdot\sqrt{14}\,dt = 6\sqrt{14}\int_0^2 t^3\,dt = 24\sqrt{14}$

<u>Kurvintegral av vektorfält</u>

Givet en kurva och ett vektorfält F kan vi beräkna kurvintegralen $\int_\gamma F\bullet dr$ (skalärprodukt!) som vi ofta skriver $\int_\gamma F_1dx + F_2dy + F_3dz$.

Även denna kurvintegral kan överföras till en enkelintegral genom parametrisering; man får då $\int_\gamma F\bullet dr = \int_\alpha^\beta F(r(t))\bullet r'(t)dt$

Exempel: Beräkna $\int_\gamma F\bullet dr$ där $F = (x,y,z)$ och γ parametriseras

$$r(t) = (2t+1, t, 3t-1)$$

Lösning: kurvintegralen blir: $\int_0^1 (2t+1, t, 3t-1)\bullet(2,1,3)dt = \int_0^1 14t - 1\,dt = 6$

Kurvintegralen $\int_\gamma F\bullet dr$ kan också beräknas på andra, och ibland betydligt behagligare sätt. Om nämligen F är konservativt med potential U fungerar den senare som en slags primitiv funktion.

Det gäller att om kurvan löper från punkten p_{start} till punkten p_{slut} är

$$\int_\gamma F\bullet dr = U(p_{slut}) - U(p_{start})$$

Exempel: Beräkna $\int_\gamma 2x\ln z\,dx + 3y^2z\,dy + \left(\frac{x^2}{z} + y^3\right)dz$ där γ är kurvan

$$r(t) = \left(1 + \sin\frac{\pi t}{2}, t^2 - t + 1, t + 1\right),\ 0 \le t \le 1$$

Lösning: En parametrisering verkar motbjudande. Det blir betydligt enklare om vi hittar en potential till fältet.

Vi söker alltså ett U med $U'_x = 2x\ln z \quad \Rightarrow \quad U = x^2\ln z + h(y,z) \quad \Rightarrow \quad U'_y = \dfrac{\partial h}{\partial y}$

Alltså måste $\dfrac{\partial h}{\partial y} = 3y^2 z \quad \Rightarrow \quad h = y^3 z + k(z) \quad \Rightarrow \quad U'_z = \dfrac{x^2}{z} + y^3 + k'(z)$

Så vi får en potential om vi väljer $k = 0$ och U blir $= x^2\ln z + y^3 z$

Och därför blir

$$\int_\gamma 2x\ln z\,dx + 3y^2 z\,dy + \left(\frac{x^2}{z} + y^3\right)dz = U(2,1,2) - U(1,1,1) = 4\ln 2 + 2 - 1$$

Ytterligare en metod att beräkna $\int_\gamma F \bullet dr$ introduceras i kapitel 16 i samband med Greens formel.

Ytintegraler

Givet en yta Y i rummet och en funktion $f(x,y,z)$ kommer vi att studera ytintegraler, $\iint_Y f\,dS$ där dS är det så kallade ytelementet.

Genom att parametrisera ytan med två parametrar u och v, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ kan man överföra ytintegralen till en dubbelintegral.

Man har nämligen $dS = |r'_u \times r'_v|\,dudv$ och därför

$$\iint_Y f\,dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|r'_u \times r'_v|\,dudv,$$

där D står för det område i (u,v)–planet som via parametriseringen genererar ytan Y.

Parametriseringen är inte alltid trivial, och det finns dessutom flera alternativ som sinsemellan kan leda till helt olika typer av svårigheter i den uppkomna dubbelintegralen.

Men ofta är ytan en funktionsyta $z = f(x,y)$ som enkelt låter sig parametriseras genom $(x,y,f(x,y))$.

I detta fall blir $r'_x \times r'_y = (1,0,f'_x) \times (0,1,f'_y) = (-f'_x, -f'_y, 1)$ och $dS = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\,dxdy$

Exempel: Beräkna $\iint_Y (4-z)dS$ där Y är ytan $z = 4 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \le 4$

Lösning: Y är en funktionsyta $z = f(x,y)$ och vi kan använda parametrisera genom $(x,y,f(x,y))$

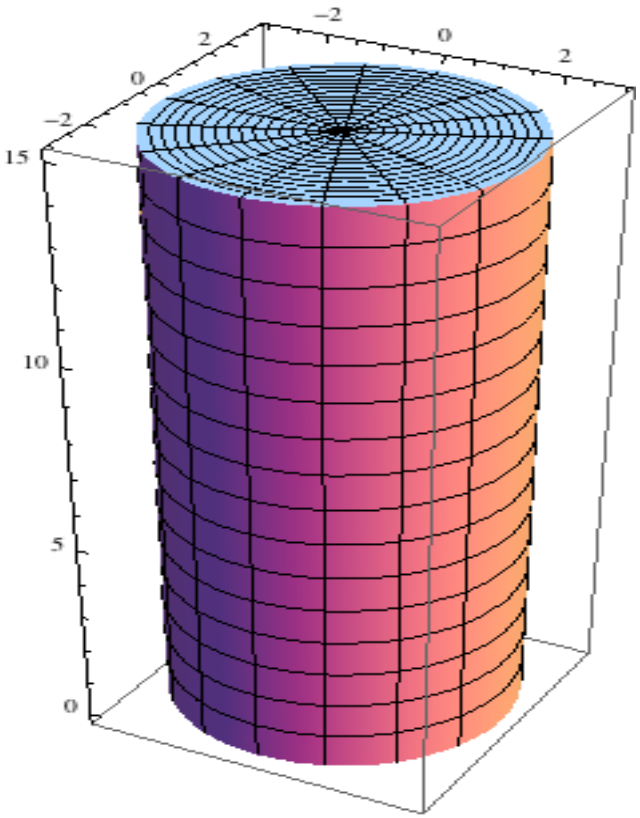
Vi får då

$$\iint_Y (4-z)dS = \iint_{x^2+y^2\le 4} (4-z)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy =$$

$= 2\pi \int_0^2 r^2\sqrt{1+4r^2}\,rdr$ som beräknas på vanligt sätt.

På vissa enkla ytor kan man slippa parametrisera och till exempel utnyttja att $\iint_Y dS$ betecknar arean av ytan.

Exempel: Beräkna $\iint_Y zdS$ där Y är en sluten cylinder med radie 3 kring z-axeln från $z=0$ till $z=15$



Lösning: Här består ytan av tre olika stycken som måste behandlas var för sig. Vi kallar dem Y_1, Y_2, Y_3 där Y_1 är själva cylindern.
Y_1 parametriserar vi $r(t,\theta) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, t)$ så att
$r_t' \times r_\theta' = (0,0,1)\times(-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)$ så att $|r_t' \times r_\theta'| = 3$ och
$\iint_{Y_1} zdS = \iint_{\substack{0\le t\le 15\\ 0\le\theta\le 2\pi}} t\,3dtd\theta = 675\pi$
På "bottenstycket" är $z=0$ så $\iint_{Y_2} zdS = 0$
Slutligen, på "locket" är $z=15$ så $\iint_{Y_3} zdS = 15\iint_{Y_3} dS = 15\cdot$(arean av locket)=
$=145\pi$

Svar: 810π

Vi kommer nu till en viktigt tillämpning av ytintegraler. Utgångspunkten är ett vektorfält F som beskriver med vilken riktning en vätska strömmar i något medium och hur mycket av denna vätska som per tidsenhet strömmer igenom ett membran.

Detta membran motsvarar en yta i rummet och den efterfrågade flödeshastigheten visar sig ges av ytintegralen $\iint_Y F \cdot N\, dS$ där N är ytans enhetsnormal.

Detta är en ytintegral av den typ vi studerat i föregående avsnitt, men situationen är faktiskt lite bättre än så.
Uttrycket $r_u' \times r_v'$ som vi använder för att få grepp om ytelementet dS, är ju i själva verket en normalvektor till ytan varför vi kan skriva $N = \dfrac{r_u' \times r_v'}{|r_u' \times r_v'|}$ och därmed

$$\iint_Y F \cdot N\, dS = \iint_Y F \cdot \frac{r_u' \times r_v'}{|r_u' \times r_v'|} |r_u' \times r_v'| dudv = \iint_Y F \cdot (r_u' \times r_v') dudv$$

Flödesintegraler kan alltså beräknas genom att den givna ytan parametriseras, men man slipper storheten $|r_u' \times r_v'|$ som ofta orsakar svårigheter i den uppkomna dubbelintegralen.

I situationer där man ombeds beräkna flöden som ovan är membranet alltid orienterat; man vill veta flödet från en given sida av membranet till den andra. Man pratar därför om ytas positiva respektive negativa sida, och definierar den positiva sidan som den som normalen pekar åt. Vilken sida som blir positiv beror därför på vilken parametrisering som görs, och det är inte alltid lätt att förutsäga. Men det är också lätt att korrigera, så det enda som egentligen krävs är att man efter gjord parametrisering kontrollerar att normalen pekar åt rätt håll.

Exempel: Beräkna flödet $(x, y, z+1)$ uppåt genom ytan $z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$

Lösning: Vi använder den naturliga parametriseringen
$r(x,y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ som ger $r_x' \times r_y' = (2x, 2y, 1)$
Normalen pekar uppåt och vi får flödet till

$$\iint_Y F \cdot N\, dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, y, z+1) \cdot (2x, 2y, 1) dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 2x^2 + 2y^2 + z + 1\, dxdy$$

Här är ju $z = 1 - x^2 - y^2$ och dubbelintegralen beräknas lätt med polära koordinater.