

Flervariabelanalys I2 Vintern 2012

Översikt föreläsningar läsvecka 3

Det tredje kapitlet i kursen behandlar dubbel- och trippelintegraler.

Den integralen vi känner till från envariabelanalysen, $\int_a^b f(x)dx$, kan ju ofta ses som arean

under $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$. Det ter sig då naturligt att utvidga begreppet till en funktion av två variabler och med $\iint_E f(x, y)dx dy$ beteckna **volymen** under $z = f(x, y)$ över området E i (x, y) -planet.

Detta låter sig naturligtvis inte göras lättvindigt; det är inte självklart vad man skall mena med volymen av ett oregelbundet område i rummet och dubbelintegralen $\iint_E f(x, y)dx dy$ måste

definieras med liknande resonemang som för enkelintegralen.

Men tolkningen av dubbelintegralen som en volym kan ändå vara ett stöd för den intuitiva förståelsen.

Precis som för enkelintegraler visar sig $\iint_E f(x, y)dx dy$ vara ett väldefinierat tal för en ganska vid klass av funktioner; till exempel duger alla kontinuerliga funktioner.

Man beräknar oftast $\iint_E f(x, y)dx dy$ genom så kallad itererad integration. Det betyder enkelt uttryckt att man integrerar först med avseende på den ena variabeln och sedan med avseende på den andra. I det enklaste fallet är området E en rektangel.

Exempel: Beräkna $\iint_E x e^{xy} dx dy$ där E ges av $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Lösning: Vi integrerar först med avseende på y . (Vi kan välja vilken vi vill, men räkningarna blir i detta fall enklare om vi börjar med y .)

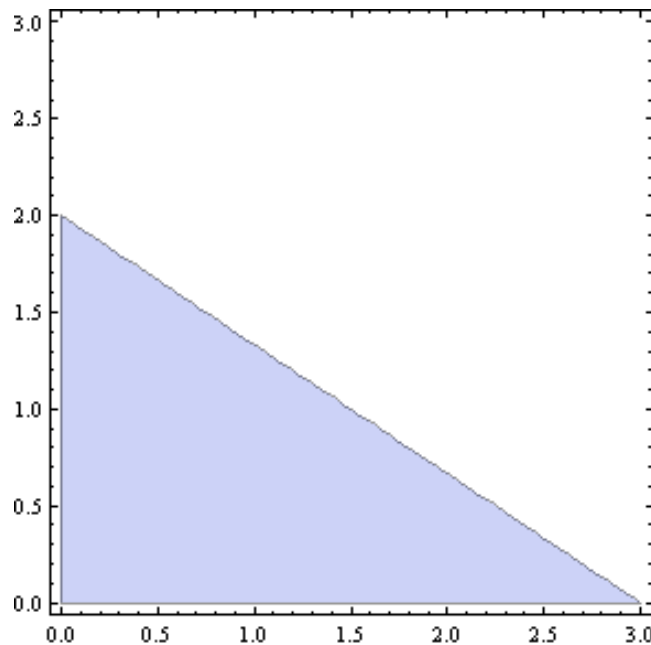
$$\int_{y=0}^{y=1} x e^{xy} dy = \left[e^{xy} \right]_{y=0}^{y=1} = e^x - 1. \text{ Det innebär att } \iint_E x e^{xy} dx dy = \int_{x=0}^{x=2} (e^x - 1) dx = e^2 - 3$$

Om E är mindre regelbundet kan integrationen bli besvärligare. Helst vill man kunna beskriva området på följande sätt: $\begin{cases} \theta(x) \leq y \leq \phi(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ (det går förstås bra om x och y "byter roller").

Man integrerar då först med avseende på y och sedan på x , och det är viktigt att man har konstanta gränser för x .

Exempel: Beräkna $\iint_E e^{-2x-3y} dx dy$ där D är området $x \geq 0, y \geq 0, 2x+3y \leq 6$

Lösning: Vi beskriver området som $\begin{cases} 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$



Första integralen: $\int_{y=0}^{y=2-\frac{2}{3}x} e^{-2x-3y} dy = \left[-\frac{1}{3} e^{-2x-3y} \right]_{y=0}^{y=2-\frac{2}{3}x} = \frac{1}{3} (e^{-2x} - e^{-6})$

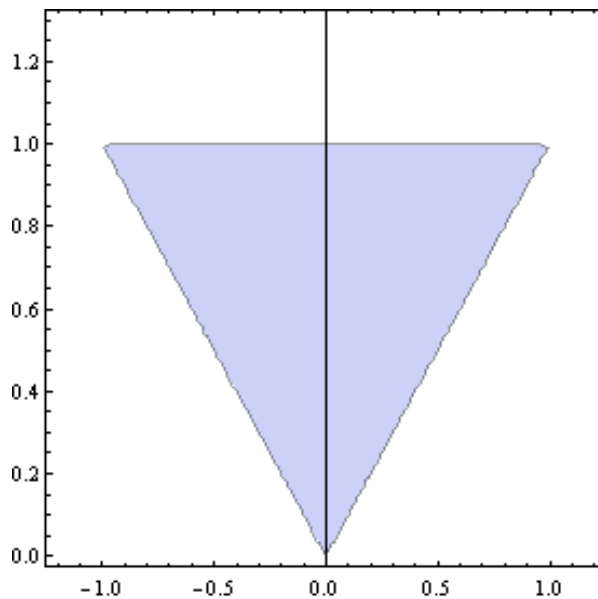
Därför blir $\iint_E e^{-2x-3y} dx dy = \frac{1}{3} \int_{x=0}^{x=3} e^{-2x} - e^{-6} dx = \frac{1}{6} (1 - 7e^{-6})$

Ibland kan man beskriva området på två olika sätt, där man på det ena sättet första integrerar med avseende på x , och på det andra först med avseende på y . Det kan vara en smaksak vilket man föredrar men det finns många fall där det ena sättet leder till betydligt enklare räkningar, och det förekommer att en beskrivning leder till en ”omöjlig” integral.

Exempel: Beräkna $\iint_E e^{-y^2} dx dy$ där E är triangeln med hörn i punkterna $(0,1)$, $(0,-1)$ samt origo.

Lösning: Här måste vi beskriva området så att vi först integrerar med avseende på x ; annars ställs vi inför uppgiften att hitta en primitiv funktion till e^{-y^2} .

Alltså: E ges av $\begin{cases} -y \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$



Första integralen: $\int_{x=-y}^{x=y} e^{-y^2} dx = \left[xe^{-y^2} \right]_{x=-y}^{x=y} = 2ye^{-y^2}$ och därför blir

$$\iint_E e^{-y^2} dx dy = \int_{y=0}^{y=1} 2ye^{-y^2} dy = \left[e^{-y^2} \right]_{y=0}^{y=1} = 1 - \frac{1}{e}$$

I envariabelanalys använder man sig av variabelsubstitution för att klara vissa besvärliga integraler.

Man kan byta variabler även i dubbelintegraler, men syftet är i första hand att skapa ett enklare område.

Det vanligaste bytet är att införa polära koordinater.

Då man inför nya variabler, säg u och v , måste man även byta areaelementet, $dx dy$ enligt

$$dx dy = \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du dv \text{ där } \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| \text{ är beloppet av den så kallade } \mathbf{funktionsdeterminanten}$$

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \text{ För polära koordinater } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \text{ gäller att } \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r$$

Exempel: Beräkna $\iint_E \frac{x^2}{1+x^2+y^2} dx dy$ där E är det inre av enhetscirkeln.

Lösning: Vi byter till polära koordinater, $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ och får

$$\iint_E \frac{x^2}{1+x^2+y^2} dx dy = \iint_F \frac{r^2 \sin^2 \theta}{1+r^2} r dr d\theta \quad \text{där } F \text{ ges av } \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Den nya integralen kan beräknas som produkten av två enkelintegraler:

$$\iint_F \frac{r^2 \sin^2 \theta}{1+r^2} r dr d\theta = \int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2} dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi(1-\ln 2)}{2}$$

Med tre variabler får man föga överraskande trippelintegraler, och sådana beräknas enligt samma princip, alltså itererad integration.

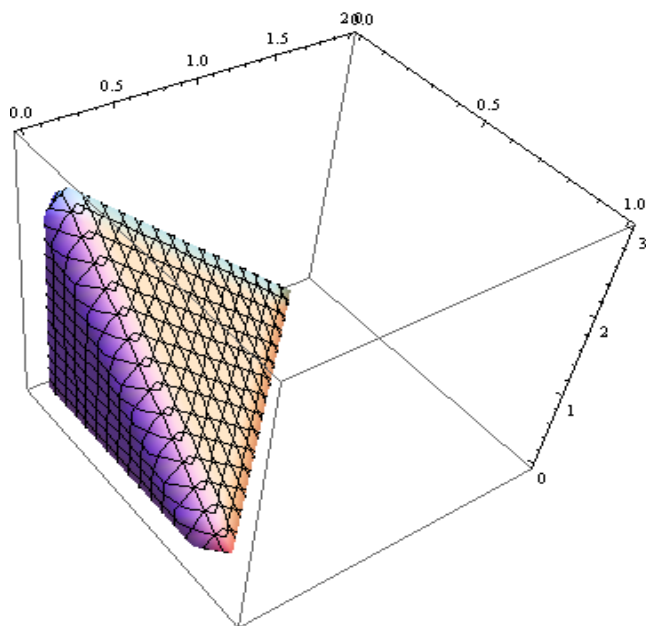
Här krävs följaktligen tre integrationer efter varandra. Man kan själv välja vilken ordning variablerna ”integreras bort”, men i de allra flesta fall är integranden och området sådant att man börjar med z .

Efter den första integralen uppstår en dubbelintegral och det område som den dubbelintegralen skall beräknas över är **projektionen** av det ursprungliga området på (x, y) -planet.

Det gäller alltså att ha en klar bild av det ursprungliga området, en uppgift som inte alltid är trivial.

Exempel: beräkna $\iiint_E xy dx dy dz$ där E är tetraedern med hörn i $(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)$

Lösning: tetraedern begränsas av de fyra planen $x=0, y=0, z=0$ samt $6x+3y+2z=6$, där man hittar det sista planet tack vare goda kunskaper i linjär algebra.

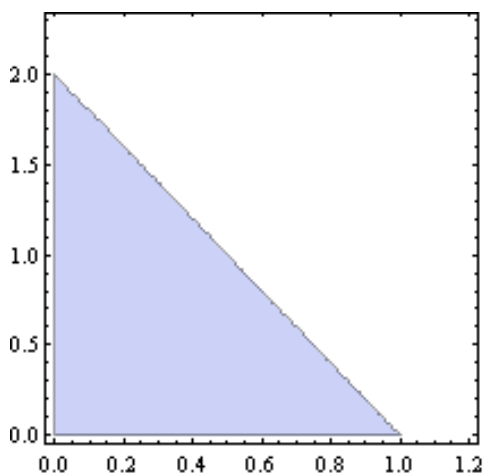


Om vi nu integrerar först i z -led får vi intervallet $0 \leq z \leq 3 - 3x - \frac{3}{2}y$ och

$$\text{integralen } \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} xyz \, dz = xy \left(3 - 3x - \frac{3}{2}y \right) \text{ (integranden är ju konstant).}$$

$$\text{Alltså blir } \iiint_E xyz \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} \iint_F (6xy - 6x^2y - 3xy^2) \, dx \, dy.$$

Området F är projektionen av E ner på (x, y) -planet. F blir då en triangel som begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 0$ samt $y = 2 - 2x$.



Den andra integralen blir därför $\int_{y=0}^{y=2-2x} (6xy - 6x^2y - 3xy^2) \, dy$. Resultatet blir ett uttryck i x som till sist skall integreras från 0 till 1. Räkningarna är enkla men dryga.