Tentamen i Analys i flera variabler för I2, 20 mars 2015

MVE270

Svar eller lösningar

1. Sätt $f = xy + zx + yz$. Gradienten i den givna punkten blir = (2,2,2) och planets ekvation: $x + y + z = 3$

2. Kedjeregeln ger $\begin{cases} f'_x = f'_u + f'_v \\ f'_y = -3f'_u + 3f'_v \end{cases}$ och den transformerade ekvationen blir $f'_v = 0$.

   Alltså är $f = h(u) = h(x - 3y)$ och eftersom $f(x, 0) = h(x) = \sin x$ blir $f(x, y) = \sin(x - 3y)$

3. Sätt $h = 2x^2 + y^2$. Vi skall optimera f under bivillkoret $h = 1$ som uppenbarligen är en kompakt mängd. Vi söker punkter på $h = 1$ där gradienterna är parallella.

   Vi får systemet: $\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 2y \\ 2x & y \end{vmatrix} = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - 4x) = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ $y = 0$ ger $x^2 = \frac{1}{2}$ och

   $x = \frac{1}{4}$ ger $y^2 = \frac{7}{8}$

   Svar: minsta värde är $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ största värde är $f\left(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}}\right) = \frac{9}{8}$

4. Man hittar lätt potentialen $= xyz^2$ och kurvintegralen blir därför $= U\left(1, -1, \frac{\pi}{2}\right) - U(0,1,0) = -\frac{\pi^2}{4}$

5.

a. SANT, ty $\int_C -ydx$ är = arean av området innanför C.

b. FALSKT, ty $div(rotF)$ måste vara = 0 för ett sådant F

c. SANT, ty integranden ligger mellan 0 och 1, och arean av integrationsområdet är $= \pi$

6. Inför nya variabler: $\begin{cases} s = x + y \\ t = x \end{cases}$. D motsvaras då av ett område som kan beskrivas

genom $\begin{cases} 0 \leq t \leq s \\ 0 \leq s \leq 1 \end{cases}$ och $\iint_D f(x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^s f(s)dt\right)ds = \int_0^1 sf(s)ds$

7. Vi kallar den givna ytan Y och lägger till en ”bottenplatta”, B, som ges av $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$
Ytan ”Y+B” blir då sluten och vi kan använda divergenssatsen:

$\iint_{Y+B} F \cdot NdS = \iiint_E divF\, dV = \iiint_E 2dV = \frac{4\pi}{3}$ där E är området innanför ”Y+B”, dvs ett halvklot med radien 1 och där vi har utnyttjat att $\iiint_E dV$ blir = volymen av E.

Vi beräknar sedan flödet genom B. Här är $N = (0,0,-1)$ eftersom divergenssatsen ger flödet ut genom området. $\iint_B F \cdot NdS = \iint_B -xydS = 0$ av symmetriskäl.

Eftersom flöde upp här motsvaras av flöde ut blir svaret: $\frac{4\pi}{3}$

8. Vi lägger till ett linjestycke L längs x-axeln för att sedan använda Greens formel.
Så $I = \int_{C+L}(e^{-x} + y^2)dx + (x + e^{-y})dy = \iint_D (1 - 2y)dxdy$ där D är området:

$\begin{cases} 0 \le y \le \cos x \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Man får $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x - \cos^2 x \, dx = 2 - \frac{\pi}{2}$

Integralen längs L räknas ut separat genom att parametrisera: $x = x, y = 0$ Man får

$I_L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} dx = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}$ så att den efterfrågade integralen I_C blir =
$= \frac{\pi}{2} + e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}} - 2$ med korrektion för orientering.

9. Sfären parametriseras som en funktionsyta: $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{cases}$

Arean av delen av sfären (som vi kallar Y) blir =
$2 \iint_Y dS = 2 \iint_{x^2+y^2 \le 1} \sqrt{(z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1} dxdy =$

$\iint_{x^2+y^2 \le 1} \frac{4dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = 8\pi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}} = 8\pi\left[\sqrt{4 - r^2}\right]_1^0 = 8\pi\left(2 - \sqrt{3}\right)$

10. Området är inte kompakt och vi ser att $f(x, x^2) = (x^2 - x)e^0 \quad \to \quad \infty$ då $x \to \infty$
så största värde saknas. Vi noterar också att $f > 0$ ovanför linjen $y = x$ och <0 under den.

Vi bildar därför området D som definieras av $\begin{cases} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$. D är kompakt så *f* har ett minsta värde där. Man söker först efter stationära punkter; systemet $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ förenklas till
$\begin{cases} 2xy - 2x^2 - 1 = 0 \\ 1 - y + x = 0 \end{cases}$ och den enda lösningen är $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ som ligger utanför D.

Längs randen $y = x^2$ får vi $h(x) = x^2 - x$. $h'(x) = 2x - 1 = 0$ om $x = \frac{1}{2}$. Längs randen $y = x$ är $f = 0$, så minsta värde på D måste vara $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$.

Eftersom $f \ge 0$ på ”resten” av området $y \ge x^2$ måste $-\frac{1}{4}$ vara minsta värde.
Svar: största värde saknas, minsta värde är $-\frac{1}{4}$