TENTAMEN I FLERVARIABELANALYS FÖR I2, MVE270 mars 2016
CHALMERS

SVAR ELLER LÖSNINGAR

Till uppgift 1 – 5 krävs bara kortfattade lösningar (men enbart svar räcker inte)

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $\sin(2z) + yx + xy^2 = 4$ i punkten $(2,1,0)$. **(2p)**

Svar: $(x-2) + 3(y-1) + z = 0$

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \sin y^2 \, dxdy$.
   Området *D* beskrivs av: $\begin{cases} x \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ **(3p)**

Svar: Byt integrationsordning: $\int_0^1 \left(\int_0^y \sin y^2 dx \right) dy = \frac{1-\cos 1}{2}$

3. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma 2xyz \, dx + x^2 z \, dy + x^2 y \, dz$
   γ är kurvan $(x,y,z) = (\cos t, \cos 2t, t)$, $0 \le t \le \pi$ **(3p)**

Svar: En potential till fältet är $F(x,y,z) = x^2 yx$, så integralen blir $= F(-1,1,\pi) - F(1,1,0) = \pi$

4. Bestäm, om sådana finns, största och minsta värde till funktionen $f(x,y) = (x-1)(y+1)(x-y)$ på den slutna triangeln med hörn i punkterna $(-1,-1)$, $(1,-1)$ samt $(1,1)$ **(5p)**

Lösning: Vi observerar först att $f \leq 0$ på hela (den kompakta) triangeln och $= 0$ på randen. Alltså är största värde = 0 och minsta värde antas i en stationär punkt.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)(2x-y-1) = 0 \\ (x-1)(x-2y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

(där vi bara söker inre punkter)

Svar: max = 0, min $= -\frac{8}{27}$

5. Bestäm arean av ytan $z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 5$ **(5p)**

Lösning: Beteckna ytan med Y; arean blir $= \iint_Y dS = \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$ där vi har parametriserat Y med x och y, och $z'_x = -2x,\ z'_y = -2y,\ dS = |z'_x \times z'_y| dxdy$. Genom att använda polära koordinater får vi integralen $2\pi \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}dr = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$

6. Låt *f* och *g* vara två positiva funktioner av två variabler, differentierbara i hela $\mathbb{R}^2$. Låt $h = \frac{f}{g}$. Visa att i en punkt där *h* har ett lokalt maximum gäller att gradienterna till *f* och *g* är parallella. **(5p)**

Lösning: Vi visar att påståendet gäller i en stationär punkt till h.
Vi har $h'_x = \frac{f'_x g - f g'_x}{g^2}$ och $h'_y = \frac{f'_y g - f g'_y}{g^2}$ så i en stationär punkt till h gäller att $f'_x g = f g'_x$ och $f'_y g = f g'_y$ Om nu någon av de partiella derivatorna är = 0, till exempel $f'_x = 0$ följer direkt att $g'_x = 0$ eftersom både f och g är $\neq 0$. Och gradienterna blir parallella. Om å andra sidan alla derivator är $\neq 0$ kan vi dividera ledvis och erhålla sambandet $\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{g'_x}{g'_y}$ dvs gradienterna är parallella.

Till uppgift 7 – 10 krävs lösningar med fullständiga motiveringar.

7. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x+2y)\sin(3x-y)\,dxdy$
   D är parallellogramet med hörn i
   punkterna $(0,0)$, $(1,3)$, $(2,-1)$ samt $(3,2)$ **(6p)**

Lösning: D ges av olikheterna $\begin{cases} 0 \le 3x-y \le 7 \\ 0 \le x+2y \le 7 \end{cases}$ Inför nya variabler: $\begin{cases} s = 3x-y \\ t = x+2y \end{cases}$

Funktionaldeterminanten blir $\frac{d(s,t)}{d(x,y)} = 7$ och dubbelintegralen: $\frac{1}{7}\iint_{\substack{0\le s\le 7\\ 0\le t\le 7}} t\sin s\,dsdt = \frac{7(1-\cos 7)}{2}$

8. Beräkna flödet av $F = (y-2xz, y-e^{x-z}, z^2)$ ner genom
   ytan $z = x^2+y^2+1$, $z \le 5$. **(7p)**

Lösning: Vi använder divergenssatsen efter att ha lagt till ett ”lock”, dvs ytan L: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ z = 5 \end{cases}$ och kallar den givna ytan för Y. $divF = 1$ så flödet ut genom ”Y+L” blir

$= \iiint_E dV = \iint_{x^2+y^2\le 4} 4 - x^2 - y^2 dxdy = 2\pi\int_0^2 4r - r^3\,dr = 8\pi$ där E förstås är området innanför ”Y+L”.

När vi beräknar flödet genom L är $N = (0,0,1)$ och $F\cdot N = z^2 = 25$ så $\iint_L F\cdot NdS = 100\pi$

Flöde ner genom Y stämmer med orienteringen från divergenssatsen så svaret blir: -92π

9. Beräkna kurvintegralen $\int_C (y^3 + \cos x)dx + (e^y - x^3)dy$ där C är halvcirkeln $x^2 + y^2 = 4$ i vänstra halvplanet från $(0, -2)$ till $(0,2)$ **(6p)**

Lösning: Vi lägger till en kurva K: från (0,-2) till (0,2) längs y-axeln så att vi kan använda Greens formel: $\int_{K-C} y^3 + \cos x\, dx + e^y - x^3\, dy = \iint_D -3x^2 - 3y^2 dxdy$ där "K-C" betecknar först K och sedan C med omvänd orientering och D är området innanför kurvorna.

Dubbelintegralen blir $= -3 \iint_{\substack{0 \le r \le 2 \\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}}} r^3 dr d\theta = -12\pi$ och kurvintegralen över K blir

$= \int_{-2}^{2} e^y dy = e^2 - e^{-2}$ Svar: $12\pi + e^2 - e^{-2}$

10. Låt a, b vara positiva konstanter och θ och ω positiva udda heltal. Bestäm, om sådana finns, största och minsta värde av funktionen $f(x, y) = x^\theta y^\omega$ på linjen $ax + by = 1$ **(8p)**

Lösning: Linjen utgör inte ett kompakt område och man ser att $f \to -\infty$ då $x \to \infty$. Minsta värde saknas alltså. Däremot finns ett största värde eftersom f är positiv bara på sträckan i första kvadranten, och detta antas i en punkt där gradienterna är parallella, alltså ∇f och ∇h där

$h = ax + by$. Och eftersom $\nabla f = x^{\theta-1} y^{\omega-1}(\theta y, \omega x)$ blir villkoret $b\theta y = \omega a x$. Tillsammans med $ax + by = 1$ får vi att $x = \frac{\theta}{a(\theta+\omega)}$ och $y = \frac{\omega}{b(\theta+\omega)}$. Svar: minsta värde saknas, största värde är $= \left(\frac{\theta}{a(\theta+\omega)}\right)^\theta \left(\frac{\omega}{b(\theta+\omega)}\right)^\omega$