Tentamen MVE270 11:e mars 2017

Svar eller lösningar

1. Sätt $w = x^2 + 2xy - y^2 + z^2$ Då bildar $\nabla w = (2x + 2, 2x - 2, 2z)$ normal till ytans tangentplan. I den givna punkten väljer vi normalen (0,2,-3) och får tangentplanets ekvation till $2y - 3z = 7$

2. Sätt $\bar{v} = (a, b)$ så att $f'_{\bar{v}} = \nabla f \cdot (a, b) = 2a + 7b$ i den givna punkten.
   Svar: $\bar{v} = \frac{(-7,2)}{\sqrt{53}}$

3. Kurvan bildar en kompakt mängd så vi letar efter parallella gradienter.

   Om vi sätter $h = x^2 + y^2$ söker vi alltså punkter där $\nabla f \ // \ \nabla h$.
   $\begin{vmatrix} 3x^2 & 2y \\ x & y \end{vmatrix} = 3x^2y - 2xy = xy(3x - 2)$ som skall vara = 0.

   Vi får max = 1 i till exempel (1,0) och min = -1 i (-1,0)

4. Byt integrationsordning: $\begin{cases} 0 \le y \le 2x \\ 0 \le x \le \sqrt{\ln 3} \end{cases}$

   Så $\iint_D \ e^{x^2} dxdy = \int_0^{\sqrt{\ln 3}} \left(\int_0^{2x} e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^{\sqrt{\ln 3}} 2xe^{x^2} dx = 2$

5. Vi ser att $U = x - 2\sqrt{yz}$ är en potential.
   Notera att både *y* och *z* är >0 på *C*.
   Så $\int_C \ Fdr = U(2,3,4) - U(0,1,1) = 4 - 2\sqrt{12}$

6. Ja, eftersom $U = \sqrt{x^2 + y^2}$ är en potential.

7. Sätt $f = x^2 + y^2 + z^2$ Eftersom till exempel $f\left(0, -\frac{2}{t}, t\right) \to \infty$ saknas största avstånd. Minsta avstånd finns däremot (man kan skära av ytan med en stor sfär kring origo för att få ett kompakt område) och antas i en punkt där gradienterna för *f* och *h* är parallella, där $h = x^2 - yz$.

Vi skall alltså lösa systemet $\begin{cases} 2x &= \lambda x \\ -z &= \lambda y \\ -y &= \lambda z \\ x^2 - yz &= 4 \end{cases}$

Ur den första ekvationen är antingen $x = 0$ eller $\lambda = 2$.

Om $\lambda = 2$ får vi $-z = 2y = -4z$, alltså $z = y = 0$ och de punkter vi noterar är $(\pm 2,0,0)$

Om $x = 0$ blir $z = \lambda^2 z$. Här kan inte *z* vara $= 0$, eftersom då hamnar vi utanför ytan.
Alltså $y = \pm z$, och återigen för att stanna på ytan, $y = -z$.
Det ger oss punkterna $\pm(0,2,-2)$.

Minsta avståndet antas då i punkterna $(\pm 2,0,0)$ och är $= 2$

8. Genom att parametrisera ytan med x och y får vi $dS = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}dxdy$ och den givna integralen blir $= \iint_{\substack{-x \le y \le x \\ 1 \le x^2+y^2 \le 4}} x(4x^2 + 4y^2 + 1)dxdy = \iint_{\substack{1 \le r \le 2 \\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}}} r\cos\theta(4r^2 + 1)rdrd\theta =$
$\int_1^2 4r^4 + r^2 dr \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \, d\theta = \frac{407\sqrt{2}}{15}$

9. Vi lägger till ett lock, L, som är ytan $z = 0$, $x^2 + y^2 \le a^2$. Om vi kallar halvsfären Y kan vi använda divergenssatsen på "Y+L".

$\iint_{Y+L} F \cdot NdS = \iiint_E \; divF \; dV = \iiint_E \; 2z + 1dV$ där *E* är halvklotet med radie *a*.

Vi beräknar trippelintegralen med rymdpolära koordinater:
$\iiint_E \; 2z + 1dV = \iiint_{\substack{0 \le r \le a \\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi < 2\pi}} 2r^3 \sin\theta \cos\theta \, drd\theta d\varphi + \frac{2\pi a^3}{3} =$
$\int_0^a r^3 dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{2\pi a^3}{3} = \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{\pi a^4}{2}$

På L är normalen $N = (0,0,1)$ och $F \cdot N = z^2 = 0$. Med hänsyn till orientering blir därför flödet av F upp genom Y: $\frac{\pi a^4}{2} - \frac{2\pi a^3}{3}$

10. Vi lägger till kurvan K, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y = 0$ så att K – C blir en sluten kurva och Greens formel kan användas. (Vi skriver –C för att markera att orienteringen har kastats om.)

Vi får $\int_{K-C}(\sin x + 2y)dx + (xy + \cos y^2)dy = \iint_D \; y - 2 \, dxdy$

där D är området innanför K – C som kan skrivas: $\begin{cases} 0 \leq y \leq \cos x \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Man beräknar då först $\int_0^{\cos x} y - 2 \, dy = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x$ och sedan
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x \; = \frac{\pi}{4} - 4$

Sedan beräknar vi kurvintegralen över K som blir = $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 0$

Till slut blir det ursprungliga kurvintegralen $= 4 - \frac{\pi}{4}$ när vi har korrigerat för orientering.