Övningstentamen i flervariabelanalys MVE270
Februari 2018

Del 1: uppgifter där enbart svar skall ges.

1. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ **(2p)**

2. Bestäm en ekvation för tangentplanet till $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2$ i punkten $(1,1)$ **(2p)**

3. Bestäm en potential till fältet $F = (yz + 1,\ xz,\ xy)$ **(2p)**

4. Beräkna flödet av fältet $F = (x + y^2, 2y + z^4, x^2 + 3z)$ ut genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ **(3p)**

5. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D\ xy^2\, dxdy$ där D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$ **(3p)**

6. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = 2x - 3y$ då $x^2 + y^2 = 1$ **(3p)**

7. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{dA}{\lfloor\sqrt{x^2+y^2}\rfloor}$ där D är området $1 \le x^2 + y^2 \le 5$.

   $\lfloor a \rfloor$ betecknar som vanligt det största heltal som är $\le a$ **(3p)**

Del 2: uppgifter till vilka fullständiga lösningar skall redovisas.

8. Låt a, b och c vara vinklarna i en triangel. Vilket är det största respektive minsta värde som uttrycket $\sin\frac{a}{2}\ \sin\frac{b}{2}\ \sin\frac{c}{2}$ kan anta? **(7p)**

9. Rita kurvan $\big(x(t), y(t)\big) = (\cos t + \sin t\,, \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$,
och beräkna arean av området den innesluter. **(6p)**

10. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D\ x^2 + y^2 dA$ där D är det
område i första kvadranten som begränsas av kurvorna
$y = 0,\ y = x,\ xy = 1$ samt $x^2 - y^2 = 1$ **(7p)**

11. Beräkna flödet av fältet $F = (\sin^2 y - x^3, e^{xz} - y, (9 + 3z)x^2)$
in genom cylindern $x^2 + y^2 = 4,\ -3 \le z \le 1$.
Cylindern är öppen i bägge ändar. **(7p)**

12. Egbert Kryphål har fått till uppgift att beräkna arean av den del av
planet $2x + y - 4z = 1$ där $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.
Han ställer upp ytintegralen $\iint_Y\ dS$ och vill sedan bestämma $dS = \left|r'_x \times r'_y\right| dxdy$.
Men Egbert gillar inte kryssprodukter och beslutar sig därför att ta en genväg: $r'_x \times r'_y$
är ju normalvektorn till planet och den kan man läsa ut direkt ur planets ekvation:
$(2, 1, -4)$. Alltså blir $dS = \sqrt{21} dxdy$ och den sökta arean =
$= \iint_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} \sqrt{21} dxdy = \sqrt{21}$.

Har Kryphål fått rätt svar? Har han resonerat korrekt? **(5p)**
Motivera tydligt.