Tentamen i Flervariabelanalys MVE270 10 mars 2018

Svar eller lösningar

1. $x + 1 + 2(y - 1) - (z - 1) = 0$

2. $v = (1,0)\ eller = (0, -1)$

3. 3/2 respektive – 3/2

4. $\frac{1-\cos 1}{3}$

5. π^4

6. zf

7. $\iint_Y f'_N\, dS = \iint_Y \nabla f \cdot N dS = \iiint_E div(\nabla f)\, dV = \iiint_E f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz}\, dV = 0$

   Här har vi använt divergenssatsen (Y är sluten) och i sista ledet att f är harmonisk. E är förstås området innanför Y.

8. Området är kompakt. Vi söker först stationära punkter genom att lösa systemet $\begin{cases} 6x - 3y^2 = 0 \\ 3y^2 - 6xy = 0 \end{cases}$ som har lösningarna $(x, y) = (0,0)$ eller $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; den senare ligger inte i området.

   Tre randstycken:
   $y = 0$: $f(x, 0) = 3x^2$
   $x = 2$: $h(y) = f(2, y) = 12 + y^3 - 6y^2$ och $h'(y) = 0\ i\ y = 0\ eller\ y = 4$ där den senare ger en punkt utanför området.
   $y = x$: $g(x) = f(x, x) = 3x^2 - 2x^3$ och $g'(x) = 0\ i\ x = 0\ eller\ x = 1$

   Vi jämför följande funktionsvärden:
   $f(1,1) = 1,\ \ f(0,0) = 0,\ \ f(2,0) = 12,\ \ f(2,2) = -4$
   Svar: största värde är 12, minsta - 4

9. Vi byter variabler: $\begin{cases} s = \frac{y}{x} \\ t = xy \end{cases}$. Det nya området beskrivs av $\begin{cases} 1 \le s \le 2 \\ 1 \le t \le 2 \end{cases}$

Funktionaldeterminanten: $\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -2\frac{y}{x}$ Alltså blir $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| = \frac{1}{2}\frac{x}{y} = \frac{1}{2s}$

Vi får $\iint_D e^{xy}dxdy = \iint_{\substack{1\le s\le 2 \\ 1\le t\le 2}} \frac{e^t}{2s} dsdt = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{ds}{s}\int_1^2 e^t dt = \frac{\ln 2}{2}(e^2 - e)$

10. Vi lägger till K, sträckan längs x-axeln från $x = -1 \ till\ x = 1$ så att Greens formel kan användas. Vi kallar C med omvänd orientering för L.

Vi får $\int_{K+L} -xydx + e^{-\sin y}dy = \iint_D xdxdy$ där D är området innanför $K + L$

D kan beskrivas: $\begin{cases} y - 1 \le x \le 1 - y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$ och integralen blir = 0.

Vidare blir $\int_K -xydx + e^{-\sin y}dy = 0$ eftersom både y och dy är =0 på K
Svar: kurvintegralen blir = 0.

11. Eftersom $divF = 2z$ använder vi divergenssatsen. Vi lägger till en yta L som fungerar som lock till den givna ytan (Y). L: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 \le 2 \\ z = 2 \end{cases}$ och räknar med normaler riktade utåt från området (E) innanför Y+L.

$\iint_{Y+L} F \cdot NdS = \iiint_E 2zdV$ Vi integrerar först i z-led: $\int_{x^2+2y^2}^2 2zdz = 4 - (x^2 + 2y^2)^2$. Vi använder sedan elliptiska koordinater på den uppkomna dubbelintegralen: $\iiint_{x^2+2y^2}^2 2zdz = \iint_{\substack{0\le r\le 1 \\ 0\le\theta<2\pi}} (4 - 4r^4)\sqrt{2}\, rdrd\theta =$
$= \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ (Här är $\begin{cases} x = \sqrt{2}\, r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ och funktionaldeterminanten $= \sqrt{2}r$).

På L är $N = (0,0,1)$ och $F \cdot N = z^2 = 4$ så flödet blir 4 gånger arean av L, alltså $4\sqrt{2}\pi$.

Med hänsyn taget till orienteringen får vi slutligen

$\iint_Y F \cdot NdS = -\left(\frac{8\sqrt{2}\pi}{3} - 4\sqrt{2}\pi\right) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$