TENTAMEN I FLERVARIABELANALYS FÖR I2, MVE270
16:e mars 2019

Svar och kortfattade lösningar

1. Svar: $x - 2 - 2(y-1) + 2(z-1) = 0$

2. Svar: största värde är $\sqrt{5}$, minsta är $-\sqrt{5}$

3. Svar: $\int_0^1 \left(\int_{e^y}^{(e-1)y+1} f(x,y)dx \right) dy$

4. Svar: $f = g(3x+y)$ där g är en differentierbar funktion av en variabel.

5. Svar: $8 + 2\ln 4$. (potentialen är $U = yx^2 + y\ln z$)

6.
   a. Derivering med avseende på t ger $xf_1'(tx,ty) + yf_2'(tx,ty) = f(x,y)$
   Sätt $t = 1$

   b. Tangentplanets ekvation i punkten $\big(a, b, f(a,b)\big)$ blir
   $f_x'(a,b)(x-a) + f_y'(a,b)(y-b) - \big(z - f(a,b)\big) = 0$

   Denna ekvation satisfieras alltid av $x = y = z = 0$, ty vänsterledet blir då $af_x' + bf_y' - f(a,b)$ som är = 0 enligt ovan.

7. Inför nya variabler, $\begin{cases} s &= x - y \\ t &= x + y \end{cases}$. Då blir $\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right| = 2$

   Den givna integralen, *I*, kan då skrivas $\iint_E -se^{st}\frac{1}{2}dsdt$ där *E* är området
   $\begin{cases} -1 \le s \le 1 \\ -1 \le t \le 1 \end{cases}$

   Den inre integralen är $\int_{-1}^1 -\frac{1}{2}se^{st}dt = \frac{e^{-s}-e^s}{2}$ och $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^{-s} - e^s\, ds = 0$

8. Låt -C vara kurvan C med omvänd orientering och lägg till K: $y = 0, 0 \leq x \leq \pi$

   På ”K-C” kan vi då använda Greens formel:

   $\int_{K-C}(e^x - y^2)dx + xydy = \iint_D \ 3ydxdy = \frac{3\pi}{4}$ där D är området innanför ”K-C”

   Vi har också $\int_K \ (e^x - y^2)dx + xydy = \int_0^\pi e^x dx = e^\pi - 1$

   Med hänsyn taget till orientering får vi till slut:

   $\int_C \ (e^x - y^2)dx + xydy = e^\pi - \frac{3\pi}{4} - 1$

9. Låt den givna ytan vara Y, och lägg till B: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ z = 0 \end{cases}$

   Ytan ”Y+B” är då sluten och vi kan använda divergenssatsen:
   Flödet ut från ”Y+B” blir $= I = \iiint_E \ divFdV = \iiint_E \ 2zdV$ där E är området innanför ”Y+B”. Eftersom $\int_0^{2-x^2-y^2} 2zdz = (2 - x^2 - y^2)^2$ blir
   $I = \iint_{\substack{0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} (2 - r^2)^2 rdrd\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 4r - 4r^3 + r^5 dr = \frac{8\pi}{3}$

   På B använder vi att $N = (0,0,-1)$ och flödet ner genom B blir därför
   $= \iint_B \ -xydS = 0$ av symmetriskäl.

   Så flödet ***upp*** genom Y blir $\frac{8\pi}{3}$ och flödet ***ner*** genom Y $-\frac{8\pi}{3}$

10. Området är inte kompakt men vi ser att $f \geq 0$ på området och till exempel $f(0,0) = 0$ så minsta värde är = 0.

    Skär av området med en linje $2x + 3y = C$ där *C* är något stort tal. På den linjen är $f(x,y) \leq C \cdot C \cdot e^{-C} \ \rightarrow \ 0$ då $C \rightarrow \infty$. Vi kan alltså välja *C* så att *f* ligger godtyckligt nära 0 bortom linjen. Eftersom $f = 0$ på axlarna följer det att funktionen har ett största värde innanför det beskurna området och att detta största värde antas i en stationär punkt.

    Vi har $\begin{cases} f'_x = ye^{-2x-3y} - 2xye^{-2x-3y} \\ f'_y = xe^{-2x-3y} - 3xye^{-2x-3y} \end{cases}$ och den sökta punkten är $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

    Svar: minsta värde är = 0, största värde är $= \frac{1}{6e^2}$