

Tentamen

Linjär Algebra AT, MVE275

2012-01-12, kl. 08.30–12.30

Examinator: Tommy Gustafsson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Emil Gustavsson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa

För godkänt (betyg 3) på tentamen krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng (i poängberäkningen räknas bonuspoäng från duggor 2011 med). Dessutom skall Matlabmomentet på kursen vara godkänt.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

1. (a) Definiera begreppet *linjärt beroende mängd av vektorer* i $\mathbb{R}^n$. (1p)
(b) Visa med definitionens hjälp, att varje mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ som innehåller nollvektorn, är en *linjärt beroende mängd av vektorer*. (2p)
(c) Visa att om mängden $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ är linjärt beroende så är minst en av vektorerna i S en linjärkombination av de övriga. (4p)
2. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)
 - (a) För alla matriser A gäller att $A^T A$ är en symmetrisk matris.
 - (b) Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så är även $0.2\mathbf{x}_1 + 0.8\mathbf{x}_2$ lösning till detta ekvationssystem.
 - (c) Om kolonnvektorerna i matrisen A är linjärt beroende, så kan inte ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha entydig lösning för någon vektor $\mathbf{b}$.
 - (d) Det finns en 3×7 -matris A sådan att $\dim(\text{Nul}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$.
 - (e) Alla kvadratiske matriser kan diagonaliseras.
 - (f) Om A är en 3×4 matris så kan avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ inte vara en-entydig (injektiv).
3. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar med kortfattade motiveringar.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Bestäm ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ på $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (2p)
då $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

VÄND!

- (c) Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ges av (2p)

$$F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Beräkna $F(\mathbf{v})$ för $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

- (d) Ange en bas för $\text{Nul}(A)$ då (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (e) Ange en bas för $\text{Col}(B)$ då (2p)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (f) Ange vilka av följande vektorer: (2p)

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$
som är egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \\ -5 & -4 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ange också motsvarande egenvärden.

4. Bestäm en ON-bas till nollrummet för matrisen (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Utvidga denna sedan till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^4$.

5. (a) Visa att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning då (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- (b) Bestäm minsta-kvadrat lösningen till ekvationssystemet ovan. (5p)

6. Göteborg stad har nyligen infört ett system med stadscyklar där man (till en låg kostnad) kan låna en cykel från ett cykelställ och ställa den ifrån sig vid ett annat. Vi skall här anta att det finns tre sådana ställ som vi kallar A, B och C. En undersökning visar att av de cyklar som är i ställ A en månad befinner sig 40% i A månaden efter, 30% i B och 30% i C. För ställ B är motsvarande siffror 20% i A, 50% i B och 30% i C. För ställ C gäller att 20% är i A, 30% i B och 50% är kvar i C. Bestäm fördelningen av cyklar i respektive ställ efter att denna stabiliserat sig. (7p)

7. Visa att om matrisen A har fler kolonner än rader så är $\det(A^T A) = 0$. (5p)