Lösningar, MVE275, 2012-01-12

2 a) sann

b) sann, $A(0.2\vec{x}_1 + 0.8\vec{x}_2) = 0.2A\vec{x}_1 + 0.8A\vec{x}_2 = 0.2\vec{b} + 0.8\vec{b} = \vec{b}$

c) sann

d) falsk: $7 = \dim(Nul(A)) + \dim(Col(A)) = \underbrace{2\dim(Col\,A)}_{\text{jämn}} \neq 7$.

e) falsk

f) sann

3\. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & 9 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -5-9 = \underline{\underline{-14}}$

b) $\vec{p} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 = \frac{2}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{4}\vec{v}_2 = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}4\\0\\4\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4}\underline{\underline{\begin{bmatrix}5\\1\\3\\1\end{bmatrix}}}$

c) $F\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) \overset{(*)}{=} F\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) + 2F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$. (*) F är linjär!

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$A\vec{x} = 0$ har de fria variablerna $x_2 = s$ och $x_5 = t$

$(\vec{x} = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^T)$

och $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_5 = 0 \\ x_3 + 4x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ Dvs $\vec{x} = s\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}3\\0\\-4\\1\\1\end{bmatrix}$, $s,t \in \mathbb{R}$.

En bas för $Nul(A)$ är $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\-4\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$.

e) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

pivotkolonner

Svar: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ utgör en bas för $Col(A)$.

3 f) Vi testar:

$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-3\\0\\3\\-3\end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix} = -3\vec{v}_1$, Dvs $\vec{v}_1$ är en egenvektor med tillhörande egenvärde -3.

$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\3\\-2\end{bmatrix} \neq \lambda\vec{v}_2$ (alla λ), Dvs $\vec{v}_2$ är ingen egenvektor.

$A\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}14\\14\\-14\\-28\end{bmatrix} = 14\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-2\end{bmatrix} = 14\vec{v}_2$, Dvs $\vec{v}_3$ är en egenvektor med tillhörande egenvärde 14.

4\. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ekv. $A\vec{x} = \vec{0}$ har de fria variablerna $x_3 = -s$, $x_4 = -t$

och vi erhåller $\begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix} x_1 = s \\ x_2 = t \end{matrix}$

Dvs nollrummet ges av $\vec{x} = s\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}}_{=\vec{v}_1} + t\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}}_{=\vec{v}_2}$

$\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ utgör en bas för $Nul(A)$ och eftersom $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1) = 0$ så följer att $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$ och $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$ är en ON-bas för $Nul(A)$.

Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ är på trappstegsform och alla kolonner är pivotkolonner.

Alltså utgör kolonnerna en bas för $\mathbb{R}^4$.

Sätt $\vec{v}_3 = [1\ 0\ 0\ 0]^T$, $\vec{v}_4 = [0\ 1\ 0\ 0]^T$.

Med Gram-Schmidts metod kan vi nu utöka $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^4$.

$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - (\vec{v}_3\cdot\vec{b}_1)\vec{b}_1 - (\vec{v}_3\cdot\vec{b}_2)\vec{b}_2 = \vec{v}_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{b}_1 - 0\vec{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

$\vec{u}_4 = \vec{v}_4 - (\vec{v}_4\cdot\vec{b}_1)\vec{b}_1 - (\vec{v}_4\cdot\vec{b}_2)\vec{b}_2 = \vec{v}_4 - 0\vec{b}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$

Sätt $\vec{s}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{s}_4 = \frac{\vec{v}_4}{\|\vec{v}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$.

Då är $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4\}$ en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.
(där $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ är en ON-bas för Nul(A)).

---

5. a)

$$[A\ \vec{b}] = \begin{bmatrix}1&1&0&4\\0&2&1&2\\2&0&2&-3\\-1&-1&1&5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&0&4\\0&2&1&2\\0&-2&2&-11\\0&0&1&9\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&0&4\\0&2&1&2\\0&0&3&-9\\0&0&1&9\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1&1&0&4\\0&2&1&2\\0&0&1&9\\0&0&0&-36\end{bmatrix}$$

Sista kolonnen är en pivotkolonn och därför saknar systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ lösning.

b) Vi bestämmer minsta-kvadratlösningen genom att lösa normalekvationen $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$.

$$A^TA = \begin{bmatrix}1&0&2&-1\\1&2&0&-1\\0&1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\2&0&2\\-1&-1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6&2&3\\2&6&1\\3&1&6\end{bmatrix}.$$

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix}1&0&2&-1\\1&2&0&-1\\0&1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\\-3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\3\\1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}6&2&3&-7\\2&6&1&3\\3&1&6&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}0&-16&0&-16\\2&6&1&3\\1&-5&5&-2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-5&5&-2\\2&6&1&3\\0&1&0&1\end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix}1&-5&5&-2\\0&1&0&1\\0&16&-9&7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&5&3\\0&1&0&1\\0&0&-9&-9\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> Minsta kvadratlösningen är $\vec{x} = \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$.

6. Låt A_n, B_n, C_n vara antalet cyklar i ställe A, B respektive C månad n.
Sätt $\vec{x}_n = [A_n\ B_n\ C_n]^T$.
Då gäller enl. uppgiften att

$$\vec{x}_{n+1} = P\vec{x}_n = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}4&2&2\\3&5&3\\3&3&5\end{bmatrix}\vec{x}_n.$$

Den stationära fördelningen vi söker är en egenvektor till P med egenvärdet 1.
Dvs vi söker en lösning till $P\vec{v} = \vec{v}$, $(P-I)\vec{v} = \vec{0}$

$$[P-I] = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}-6&2&2\\3&-5&3\\3&3&-5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-3&1&1\\3&-5&3\\0&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}3&-1&-1\\0&-4&4\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}3&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}3&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$v_3 = 3s$ är fri

Dvs $\begin{cases}3v_1 - 2v_3 = 0\\ v_2 - v_3 = 0\end{cases}$ $\begin{cases}v_1 = 2s\\ v_2 = 3s,\end{cases}$ Dvs $\vec{v} = s\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}$.

Vi normerar så att $v_1 + v_2 + v_3 = 1$, $(s = \frac{1}{8})$.
Dvs den stationära fördelningen ges av

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}1/4\\3/8\\3/8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25\ \%\\37{,}5\ \%\\37{,}5\ \%\end{bmatrix}$$

Detta visar att 25% av cyklarna befinner sig i A
37,5% B
37,5% C.

---

7. Om A har fler kolonner än rader så har ekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$ fria variabler och ∞ många lösningar $\vec{x}$.
För varje sådant $\vec{x}$ är $A^T(A\vec{x}) = A^T\vec{0} = \vec{0}$
Dvs $(A^TA)\vec{x} = \vec{0}$ har ∞ många lösningar vilket visar att A^TA ej är inverterbar och därmed är $\det(A^TA) = 0$.