

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Skriv ditt speciella tentanummer
på varje inlämnat papper.

Tentamensskrivning: MVE275 Linjär algebra AT, 7,5 hp

Datum: 2010-10-18 kl 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, inte heller miniräknare.

Telefonvakt: Ragnar Freij 070 3088304

Obs. Alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens webbsida senast dagen efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdigrättade den 29:e oktober. Resultatet meddelas per epost. Tid för tillfälle till granskning av rättningen anges på hemsidan när skrivningarna är färdigrättade. För betyget 3 krävs 20p, för betyget 4 krävs 30p och för betyget 5 krävs 40p, alla poäng inklusive eventuell bonus. Lycka till!

1. (a) Antag att A är en symmetrisk $n \times n$ -matris. Bevisa att om man har två egenvektorer till A som svarar mot *olika* egenvärden så är vektorerna ortogonala. (6p)
- (b) Antag vi har en symmetrisk 3×3 -matris med egenvärdena 1 och 0, där egenrummet som svarar mot egenvärdet 1 ges av planet $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$. Ange en egenvektor som hör till egenvärdet 0. (2p)

2. (a) Bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$ dvs att

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

gäller om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala. (2p)

- (b) Härled ett villkor på $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ för att man skall ha likheten (1p)

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$$

- (c) Bevisa att om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är två vektorer i $\mathbb{R}^n$ så gäller (2p)

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala.

3. Här kommer 8 påståenden. **Välj ut högst 6** av dem och ange **utan motivering** för vart och ett om det är sant eller falskt. Det blir +1p för varje rätt svar och -1p för varje felaktigt svar. Är du osäker kan det alltså vara bättre att svara på färre än 6 av dem än att riskera att ge ett felaktigt svar. Totalpoängen på uppgiften kan dock inte bli negativ.

- (a) Om A är en matris med fem rader och systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig lösning för alla $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^5$, så har A exakt fem kolonner.
- (b) Om systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara har den triviala lösningen, så är kolonnerna i A linjärt beroende.
- (c) Varje egenvärde till en matris A är också egenvärde till A^2 .
- (d) Om A är en kvadratisk matris så gäller: $\det(A^T A) \geq 0$.
- (e) Om matriserna A och $2A$ har determinanterna 1 respektive 8, så är A en 4×4 -matris.
- (f) Om L är en linjär avbildning av ett vektorrum in i ett annat så gäller $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
- (g) Om produkten AB är en 3×4 -matris, så vet man att A är en matris med fyra kolonner.
- (h) Antag att H är ett underrum (eng=subspace) till $\mathbb{R}^5$. Då kan det finnas en vektor $\mathbf{v}$ i H sådan att $3\mathbf{v}$ inte ligger i H .

VÄND!

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortogonal bas för kolonnrummet till A . Du kan till exempel först bestämma en godtycklig bas som du sedan använder för att bestämma en ortogonal bas. (6p)

5. Antag att a och c är två reella parametrar och att vi har en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definierad genom

$$T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, 3x_1 + 4x_2 + ax_3),$$

där som vanligt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Låt vidare $\mathbf{b} = (1, 1, c)$. Besvara med motivering följande frågor. (6p)

- (a) För vilka a och c finns det exakt ett $\mathbf{x}$ så att $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$?
- (b) För vilka a och c finns det mer än ett $\mathbf{x}$ så att $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$?
- (c) För vilka a och c finns det inget $\mathbf{x}$ så att $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$?

6. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Undersök för vilka värden på a som matrisen A är diagonaliserbar. Bestäm för eventuella sådana a -värden en matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$ och beräkna sedan $A^n P$ för varje positivt heltal n . (6p)

7. Låt $\mathbb{P}_2$ vara det linjära rummet av alla polynom av grad högst 2. Definiera sedan en avbildning $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ genom att

$$T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}'(1) \\ \mathbf{p}''(1) \end{bmatrix}.$$

- (a) Visa att T är en linjär avbildning. (3p)
- (b) Bestäm avbildningens matris då vi använder $\{1, t, t^2\}$ som bas för $\mathbb{P}_2$ och standardbasen i $\mathbb{R}^3$. (3p)

8. En matris A kallas självinvers om $A^{-1} = A$. Vidare kallas en matris B idempotent om $B^2 = B$. Bevisa följande påståenden.

- (a) Om A är självinvers så är $B = \frac{1}{2}(I - A)$ idempotent. (2p)
- (b) Om B är idempotent så är $A = I - 2B$ självinvers. (2p)
- (c) Bestäm en 2×2 -matris A som är självinvers och vars element på plats (1,1) är 2. (3p)

/J-E A