

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Skriv ditt speciella tentanummer
på varje inlämnat papper.

Tentamensskrivning: MVE275 Linjär algebra AT, 7,5 hp

Datum: 2011-01-13 kl 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, inte heller miniräknare.
Telefonvakt: 070 3088304

Obs. Alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens webbsida senast dagen efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 26:e januari. Resultatet meddelas per epost. Granskning av rättningen kan därefter ske på MV:s expedition. För betyget 3 krävs 20p, för betyget 4 krävs 30p och för betyget 5 krävs 40p, alla poäng inklusive eventuell bonus. Lycka till!

1. (a) Hur **definieras** att en matris är inverterbar? (2p)
(b) Antag att A och B är två inverterbara matriser av samma typ. Vilken matris har då inversen $B^{-1}A^{-1}$? (1p)
(c) Bevisa ditt påstående i (b). (3p)
2. (a) Hur definieras begreppet bas för ett vektorrum V ? (2p)
(b) Bevisa att om $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för ett vektorrum V , så finns för varje vektor $\mathbf{x}$ i V entydigt bestämda tal $c_1, \dots, c_n$ så att (4p)

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \dots + c_n\mathbf{b}_n$$

3. Här kommer 8 påståenden. **Välj ut högst 6** av dem och ange **utan motivering** för vart och ett om det är sant eller falskt. Det blir +1p för varje rätt svar och -1p för varje felaktigt svar. Är du osäker kan det alltså vara bättre att svara på färre än 6 av dem än att riskera att ge ett felaktigt svar. Totalpoängen på uppgiften kan dock inte bli negativ.
 - (a) Om A är en matris med sex rader och systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart för alla $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^6$, så har A minst sex kolonner.
 - (b) Om systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningar, så är kolonnerna i A linjärt oberoende.
 - (c) Antag att A är 5×7 -matris och att för ett visst $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^5$ innehåller lösningsmängden till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ exakt tre parametrar. Då är systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart för alla $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^5$.
 - (d) Varje egenvektor till en matris A är också egenvektor till A^2 .
 - (e) En linjär avbildning från $\mathbb{R}^3$ in i $\mathbb{R}^3$ kan avbilda en linje genom origo på en linje som inte går genom origo.
 - (f) Om A är en 2×2 -matris vars determinant är 1, så har $3A$ determinanten 9.
 - (g) Kolonnerna i produkten AB är linjärt beroende om kolonnerna i B är det.
 - (h) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är kolonnvektorer i $\mathbb{R}^n$ så är produkten $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ ett tal medan $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ är en $n \times n$ -matris.

VÄND!

4. Låt A vara matrisen

(7p)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm baser för matrisens nollrum, kolonnrum och radrum samt ange matrisens rang.

5. Låt W vara det underrum till $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [0 \ 1 \ 2 \ 5]^T$, dvs $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Betrakta vektorn $\mathbf{y} = [2 \ 1 \ 4 \ -3]^T$.

(a) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på W . (4p)

(b) Bestäm avståndet från $\mathbf{y}$ till W . (2p)

6. Antag att $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är kolonnerna i enhetsmatrisen I_3 av ordning 3×3 . Antag vidare att T är en linjär avbildning $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som för en given konstant a uppfyller $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3$, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ och $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.

(a) Ange standardmatrisen för avbildningen T . (2p)

(b) Bevisa att det finns exakt ett a -värde för vilket avbildningens värdemängd är ett plan, bestäm detta a -värde och planets ekvation. (4p)

7. Betrakta den linjära avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som uppkommer genom att varje punkt P avbildas på skärningspunkten mellan planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ och den linje som går genom P och har riktningsvektorn $(2, 1, 1)$.

(a) Ange egenvärdena och egenrummen för avbildningens standardmatris utan att först bestämma denna matris. (3p)

(b) Bestäm nu standardmatrisen för avbildningen. (4p)

8. En viktig del i linjär algebra är att studera existens och entydighet av lösningar till ekvationssystem av formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

där A är en matris som inte nödvändigtvis är kvadratisk. I var och en av de följande uppgifterna är I en enhetsmatris av lämplig typ. Motiveringar skall förstås ges.

(a) Antag att det finns en matris B så att $AB = I$, vad kan då sägas beträffande existens och entydighet för lösningar till system av formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? (2p)

(b) Antag att det finns en matris C så att $CA = I$, vad kan då sägas beträffande existens och entydighet för lösningar till system av formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? (2p)

(c) En matris A kallas pseudoinverterbar om $A^T A$ är inverterbar. I sådana fall kallas $(A^T A)^{-1} A^T$ pseudoinversen till A . Kan en 2×3 -matris ha pseudoinvers ? (2p)

/J-E A