

Tentamen

Linjär Algebra AT, MVE275

2011-10-20, kl. 08.30–12.30

Examinator: Tommy Gustafsson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Richard Lärkäng, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa

För godkänt (betyg 3) på tentamen krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng (i poängberäkningen räknas bonuspoäng från duggor 2011 med). Dessutom skall Matlabmomentet på kursen vara godkänt.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

1. (a) Definiera begreppet invers till en kvadratisk matris A . (8p)
(b) Beskriv kortfattat vad en elementär matris är.
(c) Visa att om $n \times n$ matrisen A är radekvivalent med identitetsmatrisen I_n så är A inverterbar. Dvs

$$A \sim I_n \Rightarrow A \text{ är inverterbar.}$$

2. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

- (a) För alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ gäller att

$$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$$

- (b) Om den linjära avbildningen

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

avbildar en kvadrat K på en parallelogram P med area 12 så har K arean 1.

- (c) En linjärt oberoende mängd i ett delrum H är en bas för H .
(d) Standardmatrisen till en projektion på ett plan (genom origo) i $\mathbb{R}^3$ har alltid egenvärdena 1 och 0.
(e) Om matrisen A är diagonaliserbar så är den också inverterbar.
(f) Om A är inverterbar och λ är ett egenvärde till A så är $1/\lambda$ ett egenvärde till inversen A^{-1} .

VÄND!

3. Låt

(6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 8 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm en bas för kolonnrummet $\text{Col } A$ och nollrummet $\text{Nul } A$.
- (b) Bestäm koordinaterna för kolonnvektorn $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 11 \end{bmatrix}^T$ i den bas som du erhöill för $\text{Col } A$.

4. Låt

(6p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A .
- (b) Lös det linjära systemet av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ med begynnelsedata $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

5. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = a + b \cdot t$ till följande data

(6p)

$$\begin{array}{c|cccc} t_i & -2 & 0 & 2 & 4 \\ \hline y_i & 1 & 3 & 3 & 6 \end{array}$$

Beräkna också medelfelet.

OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|/\sqrt{n}$

6. Avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_4$ definieras av

(6p)

$$T(p(t)) = \int_0^t p(s)(s+1)ds.$$

- (a) Visa att T är en linjär avbildning.
- (b) Bestäm matrisen M för T relativt baserna $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.
- (c) Bestäm koordinaterna för $T(1 - 2t + 3t^2)$ i basen $\mathcal{C}$ med hjälp av en matrismultiplikation med M ovan.

7. Låt T vara den linjära avbildning som speglar en punkt $\mathbf{x}$ i planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ parallellt med riktningsvektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

(6p)

Dvs om $\mathbf{p}$ är skärningspunkten mellan planet och linjen genom $\mathbf{x}$ med riktningsvektorn $\mathbf{v}$ så är $\mathbf{x}$ och $T(\mathbf{x})$ på olika sidor av planet och deras avstånd till $\mathbf{p}$ är lika, dessutom är förstås $T(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ parallell med $\mathbf{v}$.

- (a) Ange egenvärden och egenvektorer för avbildningens standardmatris.
- (b) Bestäm standardmatrisen.

8. Låt A vara en $m \times n$ matris. Visa att $A^T A$ och A har samma nollrum.
Dvs visa att

(6p)

$$A^T A \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff A \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Lycka till!
Tommy