

Lösningar till tentan Linjär Algebra AT, den 18:e oktober 2010.

1. (a) Se beviset av sats 7.1 sid 466 i boken.
(b) Eftersom symmetrisk är egenvektorer som hör till dem som egenvärdet 0 ortogonala mot det givna planet. Det gör att normalvektorn $(1, 3, 5)$ är en sådan egenvektor.
2. (a) Se beviset av Pythagoras sats på sid 395 i boken .
(b) Vi har
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$
så vi har den önskade likheten när $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$.
(c) Likheten kan skrivas
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$
som är ekvivalent med
$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$
vilket inträffar precis när $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ Detta är ekvivalent med att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala.
3. (a) Sant. Eftersom systemet alltid är lösbart är varje rad i A en pivotrad så det finns minst 5 kolonner. Men eftersom lösningarna är entydiga kan det inte finnas fria variabler. Alltså är antalet kolonner exakt 5.
(b) Falskt, de är linjärt oberoende.
(c) Falskt, egenvärdena kvadreras.
(d) Sant, $\det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$.
(e) Falskt, $8 = 2^3$ så det är en 3×3 -matris.
(f) Sant.
(g) Falskt, det är B som säkert har 4 kolonner.
(h) Falskt, varje multipel av $\mathbf{v}$ ligger i H .

4. För att bestämma en bas överför vi först matrisen successivt på trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Här ser vi att de tre första kolonnerna är pivotkolonner, vilket betyder att motsvarande kolonner i $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$ ger en bas för kolonnrummet, dvs $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$. Vi kan nu använda ortogonaliseringsprocessen för att bestämma en ortogonal bas $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Vi tar alltså

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och slutligen

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Den linjära avbildningen är av formen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & a \end{bmatrix}.$$

Representerar vi $\mathbf{b}$ som kolonnvektor svarar frågorna mot att avgöra antalet lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vi genomför elementära radoperationer på systemets utvidgade matris, där vi i första steget subtraherar 2ggr rad1 från rad2 och 3 ggr rad1 från rad3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & a & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a-6 & c-3 \end{bmatrix}.$$

Därefter subtraherar vi rad2 från rad3 och får systemet på trappstegsform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-5 & c-2 \end{bmatrix}$$

Ur detta kan vi avläsa

- (a) Det finns exakt en lösning om $a - 5 \neq 0$ dvs $a \neq 5$.
 - (b) Det finns mer än en lösning om $a = 5$ och samtidigt $c - 2 = 0$ dvs $c = 2$
 - (c) Det finns ingen lösning om $a = 5$ men $c \neq 2$.
6. Eftersom A är triangulär står egenvärdena i huvuddiagonalen. Matrisen A är diagonaliserbar om och endast om den har tre linjärt oberoende egenvektorer. Eftersom 2 förekommer två gånger i huvuddiagonalen kommer $\lambda = 2$ att vara en dubbelrot till den karakteristiska ekvationen. Det avgörande blir då om vi kan få fram två linjärt oberoende egenvektorer till egenvärdet 2. Egenvektoreorna som svarar mot egenvärdet 2 får vi ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ ax_3 = 0 \end{cases}$$

Om $a \neq 0$ ger detta att $x_3 = 0$ vilket leder till att egenrummet är endimensionellt. I detta fall är alltså matrisen inte diagonaliserbar. Om $a = 0$ är enda villkoret $-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ vilket betyder ett plan genom origo, alltså tvådimensionellt. **Matrisen är alltså diagonaliserbar precis då $a=0$.** Två linjärt oberoende vektorer som svarar mot egenvärdet 2 är till exempel $[2, 1, 0]^T$ och $[1, -1, 1]^T$. För att bestämma en matris P behöver vi få fram en egenvektor till egenvärdet 1 också. Denna skall alltså väljas som en av lösningarna till

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + ax_3 = 0 \\ + x_3 = 0 \end{cases}$$

En lösning är $[1, 0, 0]^T$. Nu kan vi definiera matriserna D och P vara genom

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då gäller $A = PDP^{-1}$. Vidare har vi för dessa P och D

$$A^n P = P D^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{n+1} & 2^n \\ 0 & 2^n & -2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

7. (a) Om $\mathbf{p}$ och $\mathbf{q}$ båda ligger i $\mathbb{P}_2$ så gäller

$$T(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(1) + \mathbf{q}(1) \\ \mathbf{p}'(1) + \mathbf{q}'(1) \\ \mathbf{p}''(1) + \mathbf{q}''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}'(1) \\ \mathbf{p}''(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}(1) \\ \mathbf{q}'(1) \\ \mathbf{q}''(1) \end{bmatrix} = T(\mathbf{p}) + T(\mathbf{q}).$$

Om dessutom c är en konstant så har vi

$$T(c\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} c\mathbf{p}(1) \\ c\mathbf{p}'(1) \\ c\mathbf{p}''(1) \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}'(1) \\ \mathbf{p}''(1) \end{bmatrix} = cT(\mathbf{p}).$$

Dessa två egenskaper karakteriserar en linjär avbildning så beviset är klart.

(b) Avbildningens matris ges av $[T(1) \ T(t) \ T(t^2)]$. Detta leder alltså till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Observera först att A är självinvers är detsamma som att $A^2 = I$.

(a) Antag att A är självinvers, dvs $A^2 = I$. Då gäller

$$B^2 = \frac{1}{4}(I - A)^2 = \frac{1}{4}(I^2 - IA - AI + A^2) = \frac{1}{4}(I - A - A + I) = \frac{1}{2}(I - A) = B.$$

Alltså är B idempotent.

(b) Antag nu istället att B är idempotent, dvs $B^2 = B$. Då har vi $A^2 = (I - 2B)^2 = I - 2B - 2B + 4B^2 = I - 4B + 4B = I$ så A är självinvers.