

Lösningar till tentan Linjär Algebra AT, den 13:e januari 2011.

1. (a) Se början av sid 135 i boken.
 (b) AB
 (c) Se beviset av (b) sidan 138 i boken.
2. (a) Se definitionen på sidan 254 i boken.
 (b) Se beviset av sats 7 på sidan 262 i boken
3. (a) Sant. Eftersom systemet alltid är lösbar är varje rad i A en pivotrad så då finns minst 6 kolonner.
 (b) Falskt, de är linjärt beroende.
 (c) Falskt. Eftersom det finns en lösning som innehåller exakt tre parametrar, har systemet bara $7-3=4$ pivotkolonner. Då finns det pivotelement i bara fyra av raderna så systemet är inte alltid lösbar.
 (d) Sant. Om $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ så gäller $A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$.
 (e) Falskt, $\mathbf{0}$ avbildas på $\mathbf{0}$.
 (f) Sant. För 2×2 -matriser gäller $\det(3A) = 3^2 \det A$.
 (g) Sant. Om $B = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n]$ och det finns tal $c_1, \dots, c_n$ som inte alla är 0 så att

$$c_1\mathbf{b}_1 + \dots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$$

så gäller också

$$c_1A\mathbf{b}_1 + \dots + c_nA\mathbf{b}_n = A(c_1\mathbf{b}_1 + \dots + c_n\mathbf{b}_n) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Eftersom $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_n$ är kolonnerna i AB är dessa också linjärt beroende.

- (h) sant. Den första produkten är av typen $1 \times n$ ggr $n \times 1$ så resultatet är av typen 1×1 , dvs ett tal. Den andra produkten av typen $n \times 1$ ggr $1 \times n$ så resultatet är av formen $n \times n$.

4. Vi överför först matrisen successivt på trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Här ser vi att kolonnerna 1,3 och 4 är pivotkolonner, vilket betyder att motsvarande kolonner i den ursprungliga matrisen ger en bas för kolonnrummet.

En bas för radrummet får vi genom de tre första raderna i den trappstegsreducerade matrisen.

Rangen för en matris ges av antalet pivotkolonner dvs i detta fall är rangen 3.

Nollrummet bestäms av lösningarna till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eftersom systemet är homogent påverkas inte högerledet när vi genomför elementära radoperationer så nollrummet ges av lösningarna till

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Detta har lösningarna

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_5 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 3x_5 \\ x_4 = -2x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

vilket på vektorform kan skrivas

$$\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och dessa två vektorer ger en bas för nollrummet.

5. (a) Vi börjar med att bestämma en ortogonal bas för W . Låt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ och

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{8}{4} \mathbf{u}_1 = [-2 \ -1 \ 0 \ 3]^T.$$

Detta ger en ortogonal bas för W och vi kan då räkna ut projektionen av $\mathbf{y}$ på W genom

$$\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 = \frac{4}{4} \mathbf{u}_1 + \frac{-14}{14} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = [3 \ 2 \ 1 \ -2]^T.$$

- (b) Avståndet ges av längden av vektorn $\mathbf{y} - \text{proj } \mathbf{y} = [2 \ 1 \ 4 \ -3]^T - [3 \ 2 \ 1 \ -2]^T = [-1 \ -1 \ 3 \ -1]^T$ som har längden $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
6. (a) Kolonnerna i avbildningens standardmatris består av koordinaterna för bilderna av $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ respektive $\mathbf{e}_3$. Detta ger matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (b) Genom att genomföra de naturliga successiva elementära radoperationerna finner vi att A är radekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{bmatrix}.$$

Detta visar att om $a \neq 2$ så har kolonnrummet dimension 3. Eftersom bildrummet är detsamma som kolonnrummet så är alltså bildrummet hela $\mathbb{R}^3$ om $a \neq 2$. Om $a = 2$ däremot så har bildrummet dimensionen 2 och är alltså ett plan.

För att bestämma vilka $\mathbf{y}$ som ligger i värdemängden då $a = 2$ löser vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 2 & 1 & y_2 \\ 2 & 1 & 2 & y_3 \end{bmatrix}$$

Med upprepande av de elementära radoperationerna får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 - y_1 \\ 0 & -1 & 0 & y_3 - 2y_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 + y_2 - 3y_1 \end{bmatrix}$$

Värdemängden bestäms alltså av ekvationen $y_3 + y_2 - 3y_1 = 0$ vilket alltså därmed är ekvationen för det sökta planet.

7. (a) Varje vektor i det givna planet avbildas på sig själv och är därmed en egenvektor med egenvärdet 1. Motsvarande egenrum är alltså det givna planet.

Varje vektor längs linjen genom origo med riktningsvektor $(2, 1, 1)$ avbildas på nollvektorn dvs är en egenvektor med egenvärdet 0. Denna linje är alltså egenrummet för egenvärdet 0.

Summan av dimensionerna för dess egenrum är alltså 3 och eftersom matrisen är av typ 3×3 kan det då inte finnas fler egenvärden och egenvektorer.

- (b) Om vi låter A vara avbildningens matris och P är en matris där kolonnerna är en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till A och D är diagonalmatrisen med motsvarande egenvärden, så gäller $A = PDP^{-1}$.

Från (a) har vi bestämt egenrummen och egenvärdena så vi kan ta

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi bestämmer sedan P^{-1} på vanligt sätt genom $[P \ I] \sim [I \ P^{-1}]$. Detta ger oss

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

och alltså

$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. (a) Vi kan sätta $\mathbf{x} = B\mathbf{b}$ vilket ger oss

$$A\mathbf{x} = A(B\mathbf{b}) = (AB)\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

så systemet har alltid minst en lösning. Däremot kan vi inte säga något om entydighet.

- (b) Om vi antar att vi har en lösning $\mathbf{x}$ så ger $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ att också $CA\mathbf{x} = C\mathbf{b}$ dvs att $I\mathbf{x} = C\mathbf{b}$ och alltså $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$. Om det finns en lösning så är det alltså $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$. Det kan alltså i detta fall finnas högst en lösning.
- (c) Vi ser att med $C = (A^T A)^{-1} A^T$ har vi $CA = I$. Men då är alltså villkoret i (b) uppfyllt, vilket speciellt alltså att det homogena systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara har den triviala lösningen. Men eftersom A nu har tre kolonner och bara två rader finns minst en fri variabel, vilket innebär att systemet inte bara har den triviala lösningen. En 2×3 -matris kan alltså inte ha en pseudoinvers.