

Lösningar till Linjär Algebra AT, 2011-10-20

2. a) sann, (Triangelolikheten).
 b) falsk, (Kvadraterns area är $12/6 = 2$).
 c) falsk, (Mängden måste också spänna upp H).
 d) sann
 e) falsk (Matrisen för t.ex. en projection är diagonaliserbar men den är inte inverterbar)
 f) sann ($A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = A^{-1}(A\vec{v}) = A^{-1}(\lambda\vec{v}) = \lambda A^{-1}\vec{v}$,
 $A^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$)

3.

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 8 & -6 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-1)}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & 10 & -10 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot (-1)} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 5 & -10 & 20 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot (-1)} \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↑ ↑
Pivotkolonner.

Vi ser att bara de två första kolonnerna i A är pivotkolonner.

Alltså är $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ en bas för $\text{Col } A$.

Nollrummet bestämmer vi genom att lösa ekv $A\vec{x} = 0$

v. får

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 - 3x_4 = 0 \\ 5x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_2 = s, x_4 = 5t \\ \text{är fria variabler} \end{matrix}$$

Då är $x_1 = -2s + 3t$, $x_2 = s + 4t$

Dvs $\vec{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$

En bas för $\text{Nul } A$ är $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

3b. Vi löser ekvationen $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 = \vec{b}$
 utökad matris är

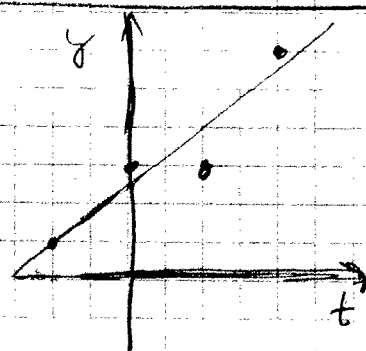
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}-\text{①}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}-2\text{②}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}+2\text{②}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Svar: koordinaterna för $\vec{b}$ i basen $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ är $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. Vi har följande ekvation:

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ a = 3 \\ a + 2b = 3 \\ a + 4b = 6 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\vec{y}}$$



Vi löser normal ekvationen $A^T A \vec{x} = A^T \vec{y}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}, \quad A^T \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [A^T A; A^T \vec{y}] &= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 13 \\ 4 & 24 & 28 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}-\text{①}} \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & 13 \\ 0 & 20 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left(\frac{1}{20}\right)} \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}-4\text{②}} \\ &\sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Den sista linjen är

$$\underline{\underline{0 = \frac{5}{2} + \frac{3}{4}t}}$$

Lösningen $\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$

$$A \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 4 \\ 11/2 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} - A \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Medelfelet är

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4}} (0^2 + (\frac{1}{2})^2 + (-1)^2 + (\frac{1}{2})^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{4}}}$$

(3)

4.
a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Egenvärdena bestäms vi m.h.a. de karakterist. eqv.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 \\ = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

Dvs egenvärdena till A är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 4$.

Egenvektorer:

$\lambda = 1$: $A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $2x_1 + x_2 = 0$ $x_2 = -2s$ för $x_1 = s$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor hörande till $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 4$: $A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②} \cdot (-1)} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 = s$ för $x_1 = s$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor hörande till $\lambda_2 = 4$.

b) Lösningen till $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ ges av

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Besynselsedata ger

$$\vec{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②} \cdot (-1)} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②} \cdot \frac{1}{3}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dvs $c_1 = -1$ och $c_2 = 1$.

Svar: $\vec{x}(t) = -\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} = \begin{bmatrix} -e^t + e^{4t} \\ 2e^t + e^{4t} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 6. a) \quad T(p_1 + p_2)(t) &= \int_0^t (p_1(s) + p_2(s))(s+1) ds = \\
 &= \int_0^t p_1(s)(s+1) ds + \int_0^t p_2(s)(s+1) ds \\
 &= T(p_1)(t) + T(p_2)(t) \quad , \quad p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2 \\
 T(c \cdot p)(t) &= \int_0^t c \cdot p(s)(s+1) ds = c \cdot \int_0^t p(s)(s+1) ds \\
 &= c \cdot T(p)(t) \quad \text{oh}
 \end{aligned}$$

Detta visar att T är en linjär avbildning.

$$b) \quad M = \begin{bmatrix} [T(1)]_B & [T(t)]_B & [T(t^2)]_B \end{bmatrix}$$

$$\text{Ne} \quad T(1) = \int_0^t 1 \cdot (s+1) ds = \left[\frac{1}{2} s^2 + s \right]_0^t = t + \frac{1}{2} t^2$$

$$T(t) = \int_0^t s(s+1) ds = \left[\frac{1}{3} s^3 + \frac{1}{2} s^2 \right]_0^t = \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3$$

$$T(t^2) = \int_0^t s^2(s+1) ds = \left[\frac{1}{4} s^4 + \frac{1}{2} s^3 \right]_0^t = \frac{1}{2} t^3 + \frac{1}{4} t^4$$

$$\text{Dvs} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad \begin{bmatrix} T(1-2t+3t^2) \end{bmatrix}_B = M \begin{bmatrix} 1-2t+3t^2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \\ 1/3 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dvs} \quad T(1-2t+3t^2) = t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} t^3 + \frac{3}{4} t^4$$

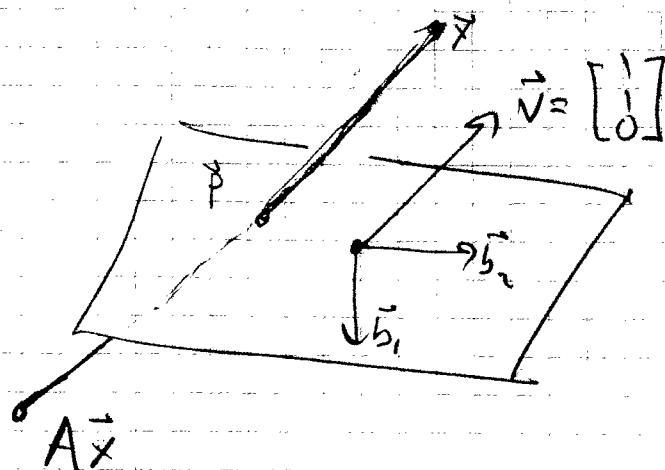
7. Vi noterar att

$$T(\vec{v}) = -\vec{v}$$

Dvs $\lambda = -1$ är ett eget värde

och $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ är

tillhörande egenvektor.



Om $\vec{b}_1$ och $\vec{b}_2$ är två vektorer parallella med planet

Så gäller ju också att $T(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$ och $T(\vec{b}_2) = \vec{b}_2$

Dvs $\lambda = 1$ är ett dubbel eget värde med egen-

vektorer $\vec{b}_1$ och $\vec{b}_2$. (Alla vektorer i planet är egenvektorer!)

Vi kan ta $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (Både uppfyller ekv. $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$)

3) Vi noterar att $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{v}\}$ bildar en bas av egenvektorer för $\mathbb{R}^3$. Alltså är standardmatrisen $\vec{A}$ för T diagonaliserbar och

$$A = P D P^{-1}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \div 2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{P D P^{-1}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Visa att

$$A^T A \vec{x} = \vec{0} \iff A \vec{x} = \vec{0}$$

1) Om $A \vec{x} = \vec{0}$ så följer direkt att $A^T A \vec{x} = A^T \vec{0} = \vec{0}$ dä

2) Antag $A^T A \vec{x} = \vec{0}$ (*)

Sätt $\vec{b} = A \vec{x}$, denna vektor tillhör $\text{Col } A$ eftersom de är en linjärkombination av kolonnerna i A .

Med (*) visar att $A^T \vec{b} = \vec{0}$

Dvs, om $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ så är

$$\begin{array}{l} \vec{a}_1^T \vec{b} = 0 \\ \vec{a}_2^T \vec{b} = 0 \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \vec{b} = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{dvs } \vec{a}_i \cdot \vec{b} = 0 \text{ för alla kolonnerna i } A \\ \text{vilket visar att } \vec{b} \in \text{Col}(A)^\perp \end{array} \right.$$

Den enda vektor som ligger i ett vektorrum W och dess ortogonala komplement $W^\perp$ är nollvektorn.

Dvs $\vec{b} = A \vec{x} = \vec{0}$ □